Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

ФИЗМАТГИЗ · 1961

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВЫПУСК 32

Е. С. ВЕНТЦЕЛЬ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

11-3-1

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой популярное изложение элементов теории игр и некоторых способов решения матричных игр. Она почти не содержит доказательств и иллюстрирует основные положения теории примерами. Для чтения достаточно знакомства с элементами теории вероятностей и математического анализа.

Книга предназначена для популяризации идей теории игр, имеющей широкое практическое применение в экономике и военном деле.

СОДЕРЖАНИЕ

2 Зак. 2597. Е. С. Вентцель

§ 1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ИГР. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При решении ряда практических задач (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, где налицо две (или более) враждующие стороны, преследующие противоположные цели, причем результат каждого мероприятия одной из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации мы будем называть «конфликтными ситуациями».

Можно привести многочисленные примеры конфликтных ситуаций из различных областей практики. Любая ситуация, возникающая в ходе военных действий, принадлежит к конфликтным ситуациям: каждая из борющихся сторон принимает все доступные ей меры для того, чтобы воспрепятствовать противнику достигнуть успеха. К конфликтным принадлежат и ситуации, возникающие при выборе системы вооружения, способов его боевого применения и вообще при планировании военных операций: каждое из решений в этой области должно приниматься в расчете на наименее выгодные для нас действия противника. Ряд ситуаций в области экономики (особенно при наличии свободной конкуренции) принадлежит к конфликтным ситуациям; в роли борющихся сторон выступают торговые фирмы, промышленные предприятия и т. д.

Необходимость анализировать подобные ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат. Теория игр по существу представляет собой не что иное, как математическую теорию конфликтных ситуаций. Цель теории — выработка рекомендаций по рациональному образу действий каждого из противников в ходе конфликтной ситуации.

Каждая непосредственно взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, и анализ ее затруднен наличием многочисленных привходящих факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ ситуации, необходимо отвлечься от второстепенных, привходящих факторов и построить упрощенную, формализованную модель ситуации. Такую модель мы будем называть «игрой».

От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным *правилам*. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтных ситуаций, которые являются *играми* в буквальном смысле слова. Примерами могут служить шахматы, шашки, карточные игры и т. д. Все эти игры носят характер соревнования, протекающего по известным правилам и заканчивающегося «победой» (выигрышем) того или иного игрока.

Такие формально регламентированные, искусственно организованные игры представляют собой наиболее подходящий материал для иллюстрации и усвоения основных понятий теории игр. Терминология, заимствованная из практики таких игр, применяется и при анализе других конфликтных ситуаций: стороны, участвующие в них, условно именуются «игроками», а результат столкновения — «выигрышем» одной из сторон.

В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников; в первом случае игра называется «парной», во втором — «множественной». Участники множественной игры могут в ее ходе образовывать коалиции — постоянные или временные. При наличии двух постоянных коалиций множественная игра обращается в парную. Наибольшее практическое значение имеют парные игры; здесь мы ограничимся рассмотрением только таких игр.

Начнем изложение элементарной теории игр с формулировки некоторых основных понятий. Будем рассматривать парную игру, в которой участвуют два игрока A и B с противоположными интересами. Под «игрой» будем понимать мероприятие, состоящее из ряда действий сторон A и B. Чтобы игра могла быть подвергнута математическому анализу, должны быть точно сформулированы *правила игры*. Под «правилами игры» разумеется система условий, регламентирующая возможные варианты действий обеих сторон, объем информации каждой стороны о поведении другой, последовательность чередования «ходов» (отдельных решений, принятых в процессе игры), а также *результат* или *исход* игры, к которому приводит данная совокупность ходов. Этот результат (выигрыш или проигрыш) не всегда имеет количественное выражение, но обычно можно, установив некоторую шкалу измерения, выразить его определенным числом. Например, в шахматной игре выигрышу можно условно приписать значение $+1$, проигрышу -1, ничьей 0.

Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если один игрок выигрывает то, что проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей обеих сторон равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Здесь мы будем рассматривать только такие игры.

Так как в игре с нулевой суммой выигрыш одного из игроков равен выигрышу другого с противоположным знаком, то, очевидно, при анализе такой игры можно рассматривать выигрыш только одного из игроков. Пусть это будет, например, игрок A. В дальнейшем мы для удобства сторону A будем условно именовать «мы», а сторону B — «противник».

При этом сторона A («мы») будет всегда рассматриваться как «выигрывающая», а сторона B («противник») как «проигрывающая». Это формальное условие, очевидно, не означает какого-либо реального преимущества для первого игрока; легко видеть, что оно заменяется противоположным, если знак выигрыша изменить на обратный.

Развитие игры во времени мы будем представлять состоящим из ряда последовательных этапов или «ходов». *Ходом* в теории игр называется выбор одного из предусмотренных правилами игры вариантов. Ходы делятся на *личные* и *случайные*.

Личным ходом называется сознательный выбор одним из игроков одного из возможных в данной ситуации ходов и его осуществление.

Пример личного хода — любой из ходов в шахматной игре. Выполняя очередной ход, игрок делает сознательный выбор одного из вариантов, возможных при данном расположении фигур на доске.

Набор возможных вариантов при каждом личном ходе регламентирован правилами игры и зависит от всей совокупности предшествующих ходов обеих сторон.

Случайным ходом называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, игральной кости, тасовка и сдача карт и т. п.). Например, сдача первой карты одному из игроков в преферанс есть случайный ход с 32 равновозможными вариантами.

Чтобы игра была математически определенной, правила игры должны для каждого случайного хода указывать *распределение вероятностей* возможных исходов.

Некоторые игры могут состоять только из случайных ходов (так называемые чисто азартные игры) или только из личных ходов (шахматы, шашки). Большинство карточных игр принадлежит к играм смешанного типа, т. е. содержит как случайные, так и личные ходы.

Игры классифицируются не только по характеру ходов (личные, случайные), но и по характеру и по объему информации, доступной каждому игроку относительно действий другого. Особый класс игр составляют так называемые «игры с полной информацией». *Игрой с полной информацией* называется игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает результаты всех предыдущих ходов, как личных, так и случайных. Примерами игр с полной информацией могут служить шахматы, шашки, а также известная игра «крестики и нолики».

Большинство игр, имеющих практическое значение, не принадлежит к классу игр с полной информацией, так как неизвестность по поводу действий противника обычно является существенным элементом конфликтных ситуаций.

Одним из основных понятий теории игр является понятие «стратегии».

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих однозначно выбор при каждом личном ходе данного игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Понятие стратегии следует пояснить подробнее.

Обычно решение (выбор) при каждом личном ходе принимается игроком в ходе самой игры в зависимости от сложившейся конкретной ситуации. Однако теоретически дело не изменится, если мы представим себе, что все эти решения принимаются игроком *заранее*. Для этого игрок должен был бы заблаговременно составить перечень всех возможных в ходе игры ситуаций и предусмотреть свое решение для каждой из них. В принципе (если не практически) это возможно для любой игры. Если такая система решений будет принята, это будет означать, что игрок выбрал определенную *стратегию*.

Игрок, выбравший стратегию, может теперь не участвовать в игре лично, а заменить свое участие списком правил, которые за него будет применять какое-либо незаинтересованное лицо (судья). Стратегия может быть также задана машине-автомату в виде определенной программы. Именно так в настоящее время играют в шахматы электронные счетные машины.

Чтобы понятие «стратегии» имело смысл, необходимо наличие в игре личных ходов; в играх, состоящих из одних случайных ходов, стратегии отсутствуют.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на «конечные» и «бесконечные».

Конечной называется игра, в которой у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Конечная игра, в которой игрок A имеет m стратегий, а игрок B — n стратегий, называется игрой $m \times n$.

Рассмотрим игру $m \times n$ двух игроков A и B («мы» и «противник»).

Будем обозначать наши стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$; стратегии противника $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Пусть каждая сторона выбрала определенную стратегию; для нас это будет A_i, для противника B_j.

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий A_i, B_j однозначно определяет исход игры — наш выигрыш. Обозначим его a_{ij}.

Если игра содержит, кроме личных, случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий A_i, B_j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является его *среднее значение* (математическое ожидание). Мы будем обозначать одним и тем же знаком a_{ij} как сам выигрыш (в игре без случайных ходов), так и его среднее значение (в игре со случайными ходами).

Пусть нам известны значения a_{ij} выигрыша (или среднего выигрыша) при каждой паре стратегий. Значения a_{ij} можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют нашим стратегиям (A_i), а столбцы — стратегиям противника (B_j). Такая таблица называется *платежной матрицей* или просто *матрицей игры*.

Матрица игры $m \times n$ имеет вид:

$A \diagdown B$	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Сокращенно мы будем обозначать матрицу игры $\|a_{ij}\|$.

Рассмотрим несколько элементарных примеров игр.

Пример 1. Два игрока A и B, не глядя друг на друга, кладут на стол по монете вверх гербом или вверх цифрой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или у обоих цифра), то игрок A забирает обе монеты; иначе их забирает игрок B. Требуется проанализировать игру и составить ее матрицу.

Решение. Игра состоит только из двух ходов: наш ход и ход противника, оба личные. Игра не принадлежит к играм с полной информацией, так как в момент хода выполняющий его игрок не знает, что сделал другой.

Так как у каждого из игроков имеется только один личный ход, то стратегия игрока представляет собой выбор при этом единственном личном ходе.

$A \diagdown B$	B_1 (г)	B_2 (ц)
A_1 (г)	1	-1
A_2 (ц)	-1	1

У нас две стратегии: A_1 — выбирать герб и A_2 — выбирать цифру; у противника такие же две стратегии: B_1 — герб и B_2 — цифра. Таким образом, данная игра есть игра 2×2. Будем считать выигрыш монеты за $+1$. Матрица игры приведена слева.

На примере этой игры, как она ни элементарна, можно уяснить себе некоторые существенные идеи теории игр.

Предположим сначала, что данная игра выполняется только один раз. Тогда, очевидно, бессмысленно говорить о каких-либо «стратегиях» игроков, более разумных, чем другие. Каждый из игроков с одинаковым основанием может принять любое решение. Однако при повторении игры положение меняется.

Действительно, допустим, что мы (игрок A) выбрали себе какую-то стратегию (скажем, A_1) и придерживаемся ее. Тогда уже по результатам первых нескольких ходов противник догадается о нашей стратегии и будет на нее отвечать наименее выгодным для нас образом, т. е. выбирать цифру. Нам явно невыгодно всегда применять какую-то одну стратегию; чтобы не оказаться в проигрыше, мы должны иногда выбирать герб, иногда — цифру. Однако, если мы будем чередовать гербы и цифры в какой-то определенной последовательности (например, через один), противник тоже может догадаться об этом и ответить на эту стратегию наихудшим для нас образом. Очевидно, надежным способом, гарантирующим, что противник не будет знать нашей стратегии, будет такая организация выбора при каждом ходе, когда мы его сами наперед не знаем (это можно обеспечить, например, подбрасыванием монеты). Таким образом, мы путем интуитивных рассуждений подходим к одному из существенных понятий теории игр — к понятию «смешанной стратегии», т. е. такой, когда «чистые» стратегии — в данном случае A_1 и A_2 — чередуются случайно с определенными частотами. В данном примере из соображений симметрии заранее ясно, что стратегии A_1 и A_2 должны чередоваться с одинаковой частотой; в более сложных играх решение может быть далеко не тривиальным.

Пример 2. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если сумма написанных чисел четная, то B платит A эту сумму в рублях; если она нечетная, то, наоборот, A платит B эту сумму. Требуется проанализировать игру и составить ее матрицу.

Решение. Игра состоит из двух ходов; оба — личные. У нас (A) три стратегии: A_1 — писать 1; A_2 — писать 2; A_3 — писать 3. У противника (B) — те же три стратегии. Игра представляет собой игру 3×3 с матрицей, приведенной справа.

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	4
A_2	−3	4	−5
A_3	4	−5	6

Очевидно, как и в предыдущем случае, на любую выбранную нами стратегию противник может ответить наихудшим для нас образом. Действительно, если мы выберем, например, стратегию A_1, противник будет всегда отвечать на нее стратегией B_2; на стратегию A_2 — стратегией B_3; на стратегию A_3 — стратегией B_2; таким образом, любой выбор определенной стратегии неизбежно приведет нас к проигрышу*). Решение этой игры (т. е. совокупность наивыгоднейших стратегий обоих игроков) будет дано в § 5.

Пример 3. В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A_1, A_2, A_3; у противника — три вида самолетов: B_1, B_2, B_3. Наша задача — поразить самолет; задача противника — сохранить его непораженным. При применении вооружения A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,9, 0,4 и 0,2; при вооружении A_2 — с вероятностями 0,3, 0,6 и 0,8; при вооружении A_3 — с вероятностями 0,5, 0,7 и 0,2. Требуется сформулировать ситуацию в терминах теории игр.

Решение. Ситуация может рассматриваться как игра 3×3 с двумя личными ходами и одним случайным. Наш личный ход — выбор типа вооружения; личный ход противника — выбор самолета для участия в бою. Случайный ход — применение вооружения; этот ход может закончиться поражением или непоражением самолета. Наш выигрыш равен единице, если самолет поражен, и равен нулю в противном случае. Нашими стратегиями являются три варианта вооружения; стратегиями противника — три варианта самолетов. Среднее значение выигрыша при каждой заданной паре стратегий есть не что иное, как вероятность поражения данного самолета данным оружием. Матрица игры приведена слева.

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	0,9	0,4	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8
A_3	0,5	0,7	0,2

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, т. е. определение «оптимальной стратегии» каждого из них.

*) Не нужно, впрочем, забывать, что в столь же бедственном положении находится и противник.

Оптимальной стратегией игрока в теории игр называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же, минимально возможный средний проигрыш). При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что противник является по меньшей мере таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

В теории игр все рекомендации вырабатывают, исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются элементы риска, неизбежно присутствующие в каждой реальной стратегии, а также возможные просчеты и ошибки каждого из игроков.

Теория игр, как и всякая математическая модель сложного явления, имеет свои ограничения. Важнейшим из них является то, что выигрыш искусственно сводится к одному-единственному числу. В большинстве практических конфликтных ситуаций при выработке разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько численных параметров — критериев успешности мероприятия. Стратегия, являющаяся оптимальной по одному критерию, необязательно будет оптимальной по другим. Однако, сознавая эти ограничения и поэтому не придерживаясь слепо рекомендаций, получаемых игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки если не в точности «оптимальной», то, во всяком случае, «приемлемой» стратегии.

§ 2. НИЖНЯЯ И ВЕРХНЯЯ ЦЕНА ИГРЫ. ПРИНЦИП «МИНИМАКСА»

Рассмотрим игру $m \times n$ со следующей матрицей.

A \ B	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Будем обозначать буквой i номер нашей стратегии; буквой j — номер стратегии противника.

Поставим себе задачу: определить свою оптимальную стратегию. Проанализируем последовательно каждую из наших стратегий, начиная с A_1.

Выбирая стратегию A_i, мы всегда должны рассчитывать на то, что противник ответит на нее той из стратегий B_j, для которой наш выигрыш a_{ij} минимален. Определим это значение выигрыша, т. е. минимальное из чисел a_{ij} в i-й строке. Обозначим его α_i:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}. \tag{2.1}$$

Здесь знаком $\min_j$ (минимум по j) обозначено минимальное из значений данного параметра при всех возможных j.

Выпишем числа α_i рядом с матрицей справа в виде добавочного столбца:

$A \backslash B$	B_1	B_2	$\ldots$	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	$\ldots$	β_m	

Выбирая какую-либо стратегию A_i, мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы не выиграем больше чем α_i. Естественно, что, действуя наиболее осторожно и рассчитывая на наиболее разумного противника (т. е. избегая всякого риска), мы должны остановиться на той стратегии A_i, для которой число α_i является максимальным. Обозначим это максимальное значение α:

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

или, принимая во внимание формулу (2.1),

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}.$$

Величина α называется *нижней ценой игры*; иначе — *максиминным выигрышем* или просто *максимином*.

Число α лежит в определенной строчке матрицы; та стратегия игрока A, которая соответствует этой строчке, называется *максиминной стратегией*.

Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника *гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньший* α. Поэтому величина α и называется «нижней ценой игры». Это — тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной («перестраховочной») стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за противника B. Так как противник заинтересован в том, чтобы обратить наш выигрыш в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения a_{ij} по каждому столбцу:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

и найдем минимальное из β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j$$

или

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β называется *верхней ценой игры*, иначе — «минимаксом». Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника называется его «минимаксной стратегией».

Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирует себе следующее: что бы мы ни предприняли против него, *он во всяком случае проиграет сумму, не большую чем* β.

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), в теории игр и ее приложениях часто называют «принципом минимакса». Наиболее осторожные максиминную и минимаксную стратегии игроков иногда обозначают общим термином «минимаксные стратегии».

В качестве примеров определим нижнюю и верхнюю цену игры и минимаксные стратегии для примеров 1, 2 и 3 § 1.

Пример 1. В примере 1 § 1 дана игра с матрицей, приведенной слева.

A \ B	B_1	B_2	α_i
A_1	1	—1	—1
A_2	—1	1	—1
β_j	1	1	

Так как величины α_i и β_j постоянны и равны соответственно —1 и +1, нижняя и верхняя цена игры также равны —1 и +1:

$$\alpha = -1; \quad \beta = +1.$$

Любая стратегия игрока A является его максиминной, а любая стратегия игрока B — его минимаксной стратегией. Вывод тривиален: придерживаясь любой из своих стратегий, игрок A может гарантировать, что он проиграет не более 1; то же может гарантировать и игрок B.

Пример 2. В примере 2 § 1 дана игра с матрицей

A \ B	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	2	—3	4	—3
A_2	—3	4	—5	—5
A_3	4	—5	6	—5
β_j	4	4	6	

Нижняя цена игры $\alpha = -3$; верхняя цена игры $\beta = 4$. Наша максиминная стратегия есть A_1; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее —3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника есть любая из стратегий B_1 и B_2; применяя их систематически, он, во всяком случае, может гарантировать, что проиграет не более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию A_2), противник может нас «наказать» за это, применив стратегию B_3 и сведя наш выигрыш к —5; равным образом и отступление противника от своей минимаксной стратегии может увеличить его проигрыш до 6.

Пример 3. В примере 3 § 1 дана игра с матрицей

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,9	0,4	0,2	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8	**0,3**
A_3	0,5	0,7	0,2	0,2
β_j	0,9	**0,7**	0,8	

Нижняя цена игры $\alpha = 0{,}3$; верхняя ценя игры $\beta = 0{,}7$. Наша наиболее осторожная (максиминная) стратегия есть A_2; пользуясь вооружением A_2, мы гарантируем, что будем поражать самолет в среднем не менее чем в 0,3 всех случаев. Наиболее осторожной (минимаксной) стратегией противника является B_2; применяя этот самолет, противник может быть уверен, что он будет поражаться не более чем в 0,7 всех случаев.

На последнем примере удобно продемонстрировать одно важное свойство минимаксных стратегий — их неустойчивость. Пусть мы применяем свою наиболее осторожную (максиминную) стратегию A_2, а противник — свою наиболее осторожную (минимаксную) стратегию B_2. До тех пор, пока оба противника придерживаются этих стратегий, средний выигрыш равен 0,6; он больше нижней, но меньше верхней цены игры. Теперь допустим, что противнику стало известно, что мы применяем стратегию A_2; он немедленно ответит на нее стратегией B_1 и сведет выигрыш к 0,3. В свою очередь, на стратегию B_1 у нас есть хороший ответ: стратегия A_1, дающая нам выигрыш 0,9, и т. д.

Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta.$$

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется *чистой ценой игры* (иногда просто *ценой игры*); мы его будем обозначать буквой ν.

Рассмотрим пример. Пусть игра 4×4 задана матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	**0,6**	0,8	0,9	**0,6**
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β_j	0,8	**0,6**	0,8	0,9	

Найдем нижнюю цену игры:

$$\alpha = 0{,}6.$$

Найдем верхнюю цену игры:

$$\beta = 0{,}6.$$

Они оказались одинаковыми, следовательно, у игры есть чистая цена, равная $\alpha = \beta = \nu = 0{,}6$.

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно *минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце*. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют *седловой точкой*; по аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется *седловой точкой матрицы*, а про игру говорят, что она *имеет седловую точку*.

Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий (в данном примере A_3 и B_2). Эти стратегии называются *оптимальными*, а их совокупность — *решением игры*.

Решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например A) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (B) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то *для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным*; такое отклонение игрока B может в лучшем случае оставить выигрыш неизменным, а в худшем случае — увеличить его.

Наоборот, если B придерживается своей оптимальной стратегии, а A отклоняется от своей, то это ни в коем случае не может быть выгодным для A.

Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

Мы видим, что в случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной «устойчивостью»: если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей. Заметим, что в этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия»: любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

Итак, для каждой игры с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих сторон, отличающуюся следующими свойствами.

1) Если обе стороны придерживаются своих оптимальных стратегий, то средний выигрыш равен чистой цене игры ν, одновременно являющейся ее нижней и верхней ценой.

2) Если одна из сторон придерживается своей оптимальной стратегии, а другая отклоняется от своей, то от этого отклоняющаяся сторона может только потерять и ни в коем случае не может увеличить свой выигрыш.

Класс игр, имеющих седловую точку, представляет большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

В теории игр доказывается, что, в частности, каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, и, следовательно, каждая такая игра имеет решение, т. е. существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая средний выигрыш, равный цене игры. Если игра с полной информацией состоит только из личных ходов, то при применении каждой стороной своей оптимальной стратегии она должна всегда кончаться вполне определенным исходом, а именно, выигрышем, в точности равным цене игры.

В качестве примера игры с полной информацией приведем известную игру с укладыванием монет на круглый стол. Два игрока поочередно кладут одинаковые монеты на круглый стол, выбирая каждый раз произвольное положение центра монеты; взаимное накрывание монет не допускается. Выигрывает тот из игроков, кто положит последнюю монету (когда места для других уже не останется). Очевидно, что исход этой игры всегда предрешен, и существует вполне определенная стратегия, обеспечивающая достоверный выигрыш тому из игроков, который кладет монету первым. А именно, он должен первый раз положить монету в центр стола, а далее на каждый ход противника отвечать симметричным ходом. При этом второй игрок может вести себя как угодно, не изменяя предрешенного результата игры. Поэтому данная игра имеет смысл только для игроков, не знающих оптимальной стратегии. Аналогично дело обстоит с шахматами и другими играми с полной информацией; любая из таких игр обладает седловой точкой и решением, указывающим каждому из игроков его оптимальную стратегию; решение шахматной игры не найдено только потому, что число комбинаций возможных ходов в шахматах слишком велико, чтобы можно было построить платежную матрицу и найти в ней седловую точку.

§ 3. ЧИСТЫЕ И СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ. РЕШЕНИЕ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Анализируя матрицы таких игр, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются *смешанными стратегиями*.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная — с частотой 1.

Оказывается, что, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т. е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой *основной теоремы теории игр*. Эта теорема была впервые доказана фон Нейманом в 1928 г. Известные доказательства теоремы сравнительно сложны; поэтому приведем только ее формулировку.

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).

Выигрыш, получаемый в результате решения, называется ценой игры. Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Очевидно, что цена игры ν всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β:

$$\alpha \leqslant \nu \leqslant \beta. \tag{3.1}$$

Действительно, α есть максимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии включают в себя в качестве частного случая и все чистые, то, допуская, кроме чистых, еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшаем своих возможностей; следовательно,

$$\nu \geqslant \alpha.$$

Аналогично, рассматривая возможности противника, покажем, что

$$\nu \leqslant \beta,$$

откуда следует доказываемое неравенство (3.1).

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий A_1, A_2, A_3 с частотами p_1, p_2, p_3, причем $p_1+p_2+p_3=1$, будем обозначать эту стратегию

$$S_A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично смешанную стратегию противника будем обозначать:

$$S_B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

где q_1, q_2, q_3 — частоты, в которых смешиваются стратегии B_1, B_2, B_3; $q_1+q_2+q_3=1$.

Предположим, что нами найдено решение игры, состоящее из двух оптимальных смешанных стратегий S_A^*, S_B^*. В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Будем называть стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока, его «полезными» стратегиями.

Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии S_A^* (S_B^*), то выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν, независимо от того, что делает другой игрок, если он только не выходит за пределы своих «полезных» стратегий.* Он, например, может пользоваться любой из своих «полезных» стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

Докажем это утверждение. Пусть имеется решение S_A^*, S_B^* игры $m \times n$. Для конкретности будем считать, что оптимальная смешанная стратегия S_A^* состоит из смеси трех «полезных» стратегий A_1, A_2, A_3; соответственно S_B^* состоит из смеси трех «полезных» стратегий B_1, B_2, B_3:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix},$$

причем $p_1+p_2+p_3=1$; $q_1+q_2+q_3=1$. Утверждается что если мы будем придерживаться стратегии S_A^*, то противник может применять стратегии B_1, B_2, B_3 в любых пропорциях, а выигрыш останется неизменным и по-прежнему будет равен цене игры ν.

Докажем это следующим образом. Пусть ν_1, ν_2, ν_3 будут выигрыши при нашей стратегии S_A^* и стратегиях противника соответственно B_1, B_2 и B_3.

Из определения оптимальной стратегии следует, что любое отклонение противника от стратегии S_B^* не может быть ему выгодно, поэтому

$$\nu_1 \geqslant \nu; \quad \nu_2 \geqslant \nu; \quad \nu_3 \geqslant \nu.$$

Посмотрим, может ли хотя бы в одном из трех случаев величина ν_1, ν_2 или ν_3 оказаться *больше* ν. Оказывается, что нет. Действительно, выразим выигрыш ν при оптимальных стратегиях S_A^*, S_B^* через выигрыши ν_1, ν_2, ν_3. Так как в стратегии S_B^* B_1, B_2 и B_3 применяются с частотами q_1, q_2, q_3, то

$$\nu = \nu_1 q_1 + \nu_2 q_2 + \nu_3 q_3 \qquad (3.2)$$

$$(q_1+q_2+q_3=1).$$

Очевидно, что если хотя бы одна из величин ν_1, ν_2, ν_3 была больше ν, то и их среднее взвешенное значение (3.2) было бы больше ν, что противоречит условию. Таким образом, доказано важное свойство оптимальных стратегий, которое мы будем широко применять при решении игр.

§ 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИГР. ИГРЫ 2×2 и $2 \times n$

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то нахождение решения есть вообще довольно трудная задача, особенно при больших m и n.

Иногда эту задачу удается упростить, если предварительно уменьшить число стратегий путем вычеркивания некоторых излишних.

Излишние стратегии бывают а) дублирующие и б) заведомо невыгодные. Рассмотрим, например, игру с матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Нетрудно убедиться, что стратегия A_3 в точности повторяет («дублирует») стратегию A_1, поэтому любую из этих двух стратегий можно вычеркнуть.

Далее, сравнивая почленно строки A_1 и A_2, видим, что каждый элемент строки A_2 меньше (или равен) соответствующего элемента строки A_1. Очевидно, что мы никогда не должны пользоваться стратегией A_2; она является заведомо невыгодной. Вычеркивая A_3 и A_2, приводим матрицу к более простому виду (см. слева).

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Далее замечаем, что для противника стратегия B_3 заведомо невыгодна; вычеркивая ее, приводим матрицу к окончательному виду (см. ниже). Таким образом, игра 4×4 вычеркиванием дублирующих и заведомо невыгодных стратегий сведена к игре 2×3.

A \ B	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий всегда должна предшествовать решению игры.

Наиболее простыми случаями конечных игр, которые всегда можно решить элементарными способами, являются игры 2×2 и $2 \times m$.

Рассмотрим игру 2×2 с матрицей:

$A \setminus B$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Здесь могут встретиться два случая: 1) игра имеет седловую точку; 2) игра не имеет седловой точки. В первом случае решение очевидно: это пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Заметим кстати, что в игре 2×2 наличие седловой точки всегда соответствует существованию заведомо невыгодных стратегий, которые должны быть вычеркнуты при предварительном анализе *).

Пусть седловой точки нет и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней: $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальную смешанную стратегию игрока A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Она отличается тем свойством, что, каковы бы ни были действия противника (если только он не выходит за пределы своих «полезных» стратегий), выигрыш будет равен цене игры ν. В игре 2×2 обе стратегии противника являются «полезными», — иначе игра имела бы решение в области чистых стратегий (седловую точку). Значит, если мы придерживаемся своей оптимальной стратегии $S^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, то противник может пользоваться любой из своих чистых стратегий B_1, B_2, не изменяя среднего выигрыша ν. Отсюда имеем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = \nu, \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

из которых, принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, получим:

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1),$$

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (4.2)$$

Цену игры ν найдем, подставляя значения p_1, p_2 в любое из уравнений (4.1).

*) Читателю предлагается проверить это на ряде матриц 2×2.

Если цена игры известна, то для определения оптимальной стратегии противника $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ достаточно одного уравнения, например:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu,$$

откуда, учитывая, что $q_1 + q_2 = 1$, имеем:

$$q_1 = \frac{\nu - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}, \; q_2 = 1 - q_1.$$

Пример 1. Найдем решение игры 2×2, рассмотренной в примере 1 § 1, с матрицей.

A \ B	B_1	B_2
A_1	1	−1
A_2	−1	1

Игра не имеет седловой точки ($\alpha = -1$; $\beta = +1$), и, следовательно, решение должно лежать в области смешанных стратегий:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}; \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}.$$

Нужно найти p_1, p_2, q_1 и q_2.

Для p_1 имеем уравнение

$$1 \cdot p_1 + (-1) \cdot (1 - p_1) = (-1) \cdot p_1 + 1 \cdot (1 - p_1),$$

откуда

$$p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = \frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем:

$$q_1 = \frac{1}{2}; \quad q_2 = \frac{1}{2}; \quad \nu = 0.$$

Следовательно, оптимальная стратегия для каждого из игроков состоит в том, чтобы случайным образом чередовать обе свои чистые стратегии, пользуясь одинаково часто каждой из них; при этом средний выигрыш будет равен нулю.

Полученный вывод был достаточно ясен заранее. В следующем примере мы рассмотрим более сложную игру, решение которой не является столь очевидным. Пример представляет собой элементарный образец игр, известных под названием игр с «обманом» или «введением в заблуждение». На практике в конфликтных ситуациях часто применяются разные способы введения противника в заблуждение (дезинформация, расстановка ложных целей и т. д.). Пример, несмотря на свою простоту, довольно поучителен.

Пример 2. Игра состоит в следующем. Имеются две карты: туз и двойка. Игрок A наугад вынимает одну из них; B не видит, какую карту он вынул. Если A вынул туза, он заявляет: «у меня туз», и требует у противника 1 рубль. Если A вынул двойку, то он может либо A_1) сказать «у меня туз» и потребовать у противника 1 рубль, либо A_2) признаться, что у него двойка, и уплатить противнику 1 рубль.

Противник, если ему добровольно платят 1 рубль, может только принять его. Если же у него потребуют 1 рубль, то он может либо B_1) поверить игроку A, что у него туз, и отдать ему 1 рубль, либо B_2) потребовать проверки с тем, чтобы убедиться, верно ли утверждение A. Если в результате проверки окажется, что у A действительно туз, B должен уплатить A 2 рубля. Если же окажется, что A обманывает и у него двойка, игрок A уплачивает игроку B 2 рубля.

Требуется проанализировать игру и найти оптимальную стратегию каждого из игроков.

Решение. Игра имеет сравнительно сложную структуру; она состоит из одного обязательного случайного хода — выбора игроком A одной из двух карт — и двух личных ходов, которые, однако, необязательно осуществляются. Действительно, если A вынул туза, то он не делает никакого личного хода: ему предоставлена только одна возможность — потребовать 1 рубль, что он и делает. В этом случае личный ход — верить или не верить (т. е. платить или не платить 1 рубль,) — передается игроку B. Если A в результате первого случайного хода получил двойку, то ему предоставляется личный ход: уплатить 1 рубль или попытаться обмануть противника и потребовать 1 рубль (короче: «не обманывать» или «обманывать»). Если A выбирает первое, то B остается только принять 1 рубль; если A выбрал второе, то игроку B предоставляется личный ход: верить или не верить A (т. е. уплатить A 1 рубль или требовать проверки).

Стратегии каждого из игроков представляют собой правила, указывающие, как поступить игроку, когда ему предоставляется личный ход.

Очевидно, у A только две стратегии:

A_1 — обманывать, A_2 — не обманывать.

У B — тоже две стратегии:

B_1 — верить, B_2 — не верить.

Построим матрицу игры. Для этого вычислим средний выигрыш при каждой комбинации стратегий.

1. A_1B_1 (A обманывает, B верит).

Если A получил туза $\left(\text{вероятность этого } \frac{1}{2}\right)$, то ему не предоставляется личного хода; он требует 1 рубль, и игрок B верит ему; выигрыш A в рублях равен 1.

Если A получил двойку $\left(\text{вероятность этого тоже } \frac{1}{2}\right)$, он согласно своей стратегии обманывает и требует 1 рубль; B ему верит и уплачивает; выигрыш A также равен 1.

Средний выигрыш:

$$a_{11} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

2. A_1B_2 (A обманывает, B не верит).

Если A получил туза, у него нет личного хода; он требует 1 рубль; B согласно своей стратегии не верит и в результате проверки уплачивает 2 рубля (выигрыш A равен $+2$).

Если A получил двойку, он согласно своей стратегии требует 1 рубль; B, согласно своей, не верит; в результате A уплачивает 2 рубля (выигрыш A равен -2). Средний выигрыш равен:

$$a_{12} = \frac{1}{2} \cdot (+2) + \frac{1}{2} \cdot (-2) = 0.$$

3. A_2B_1 (A не обманывает, B верит).

Если A вынул туза, он требует 1 рубль; B согласно своей стратегии уплачивает; выигрыш A равен $+1$. Если A вынул двойку, он согласно своей стратегии платит 1 рубль; B остается только принять (выигрыш A равен -1). Средний выигрыш равен:

$$a_{21} = \frac{1}{2} \cdot (+1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0.$$

4. A_2B_2 (A не обманывает, B не верит).

Если A вынул туза, он требует 1 рубль; B проверяет и в результате проверки уплачивает 2 рубля (выигрыш равен $+2$).

Если A вынул двойку, он уплачивает 1 рубль; B остается только принять (выигрыш равен -1).

Средний выигрыш равен:

$$a_{22} = \frac{1}{2} \cdot (+2) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}.$$

A \ B	B_1 (верить)	B_2 (не верить)
A_1 (обм.)	1	0
A_2 (не обм.)	0	$\frac{1}{2}$

Строим матрицу игры (см. справа). Матрица не имеет седловой точки. Нижняя цена игры $\alpha = 0$, верхняя цена игры $\beta = \frac{1}{2}$. Найдем решение игры в области смешанных стратегий. Применяя формулу (4.2), получим:

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}; \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

т. е. игрок A должен в одной трети всех случаев пользоваться своей первой стратегией (обманывать), а в двух третях — второй (не обманывать). При этом он будет выигрывать в среднем цену игры

$$\nu = \frac{1}{3}.$$

Значение $\nu = \frac{1}{3}$ свидетельствует о том, что в данных условиях игра выгодна для A и невыгодна для B. Пользуясь своей оптимальной стратегией, A всегда может себе обеспечить положительный средний выигрыш.

Заметим, что, если бы A пользовался своей наиболее осторожной (максиминной) стратегией (в данном случае обе стратегии A_1 и A_2 являются максиминными), он имел бы средний выигрыш, равный нулю. Таким образом, применение смешанной стратегии дает A возможность реализовать свое преимущество над B, возникающее при данных правилах игры.

Определим оптимальную стратегию B. Имеем:

$$q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot 0 = \frac{1}{3}; \quad q_1 = \frac{1}{3}; \quad q_2 = \frac{2}{3},$$

откуда $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, т. е. игрок B должен в одной трети всех случаев верить A и уплачивать ему 1 рубль без проверки, а в двух третях случаев — проверять. Тогда он будет в среднем на каждую игру проигрывать $\frac{1}{3}$. Если бы он пользовался своей минимаксной чистой стратегией B_2 (не верить), он на каждую игру проигрывал бы в среднем $\frac{1}{2}$.

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Решению игры 2×2 можно дать простую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется игра 2×2 с матрицей, приведенной слева.

Возьмем участок оси абсцисс длиной 1 (рис. 4.1). Левый конец участка (точка с абсциссой $x = 0$) будет изображать стратегию A_1; правый конец участка ($x = 1$) — стратегию A_2. Проведем через точки A_1 и A_2 два перпендикуляра к оси абсцисс: ось $I—I$ и ось $II—II$. На оси $I—I$ будем откладывать выигрыши при стратегии A_1; на оси $II—II$—выигрыши при стратегии A_2. Рассмотрим стратегию

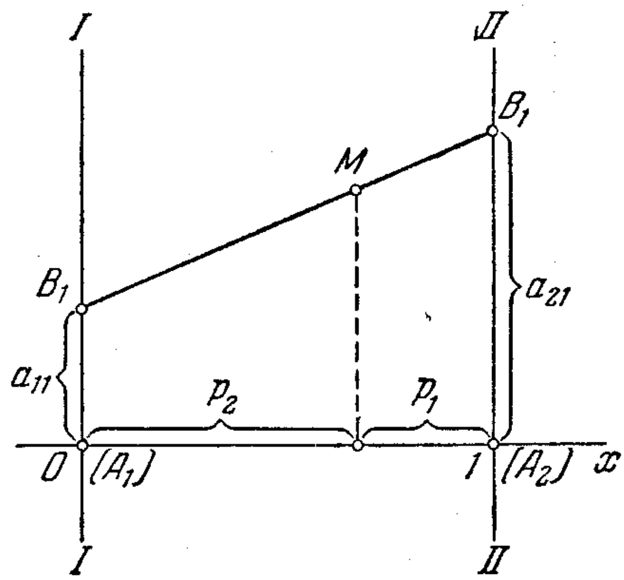

Рис. 4.1.

противника B_1; она дает две точки на осях $I—I$ и $II—II$ с ординатами соответственно a_{11} и a_{21}. Проведем через эти точки прямую B_1B_1. Очевидно, если мы при стратегии противника B_1 будем применять смешанную стратегию

$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, то наш средний выигрыш, равный в этом случае $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$, изобразится точкой M на прямой B_1B_1; абсцисса этой точки равна p_2. Прямую B_1B_1, изображающую выигрыш при стратегии B_1, будем условно называть «стратегией B_1».

Очевидно, точно таким же способом может быть построена и стратегия B_2 (рис. 4.2).

Нам нужно найти оптимальную стратегию S_A^*, т. е. такую, для которой минимальный выигрыш (при любом поведении B) обращался бы в максимум. Для этого построим

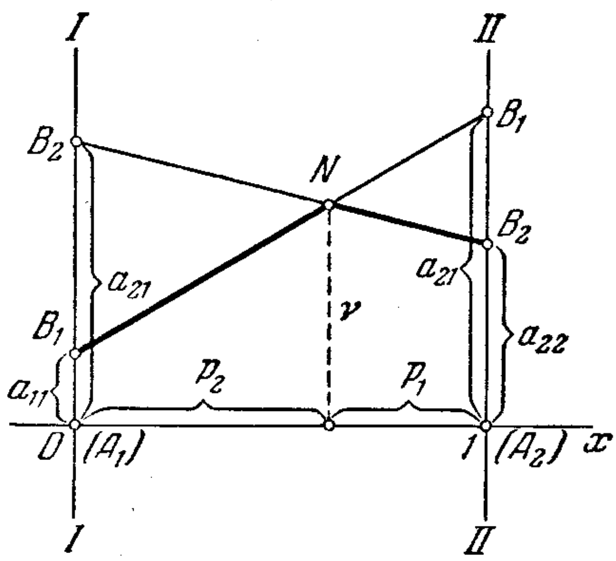

Рис. 4.2.

нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1, B_2, т. е. ломаную B_1NB_2, отмеченную на рис. 4.2 жирной линией. Эта нижняя граница будет выражать минимальный выигрыш игрока A при любых его смешанных стратегиях; точка N, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума, и определяет решение и цену игры. Нетрудно убедиться, что ордината точки N есть цена игры ν, а ее абсцисса равна p_2 — частоте применения стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии S_A^*.

В нашем случае решение игры определялось точкой пересечения стратегий. Однако это не всегда будет так; на рис. 4.3 показан случай, когда, несмотря на наличие пересечения стратегий, решение дает для обоих игроков чистые стратегии (A_2 и B_2), а цена игры $\nu = a_{22}$.

В данном случае матрица имеет седловую точку, и стратегия A_1 является заведомо невыгодной, т. к. при любой чистой стратегии противника она дает меньший выигрыш, чем A_2.

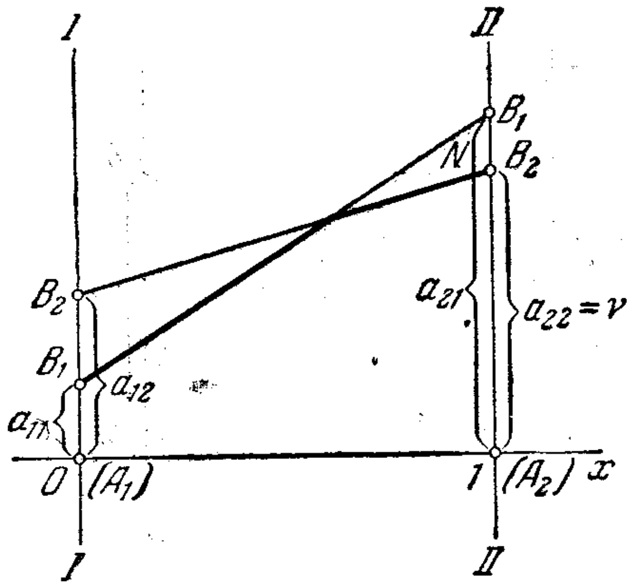

Рис. 4.3.

В случае, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у противника, геометрическая интерпретация имеет вид, представленный на рис. 4.4.

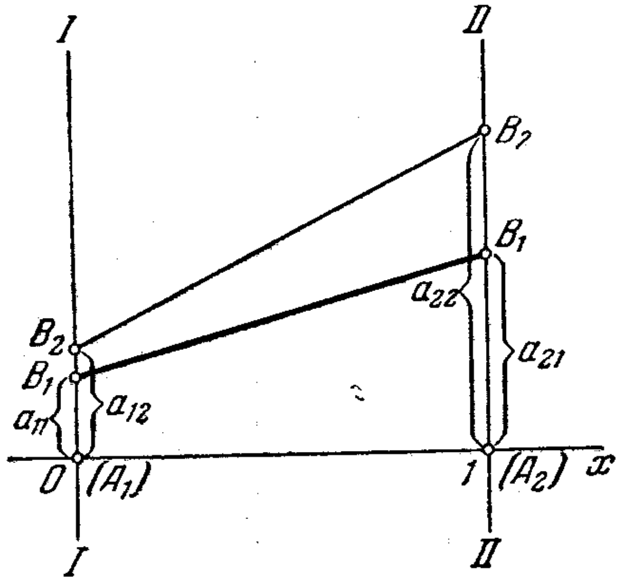

Рис. 4.4.

В данном случае нижняя граница выигрыша совпадает со стратегией B_1; стратегия B_2 для противника является заведомо невыгодной.

Геометрическая интерпретация дает возможность представить наглядно также нижнюю и верхнюю цены игры (рис. 4.5). Для иллюстрации построим геометрические

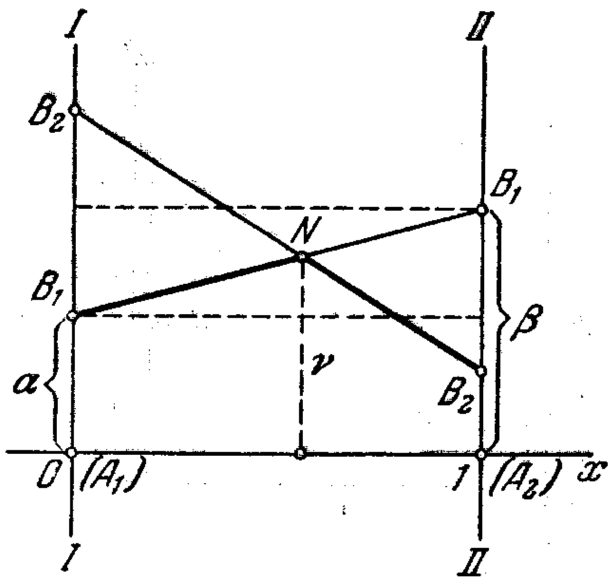

Рис. 4.5.

интерпретации игр 2×2, рассмотренных в примерах 1 и 2 (рис. 4.6 и 4.7).

Мы убедились, что любая игра 2×2 может быть решена элементарными приемами. Совершенно аналогично может быть решена любая игра $2 \times n$, где у нас имеются всего две стратегии, а у противника — произвольное число.

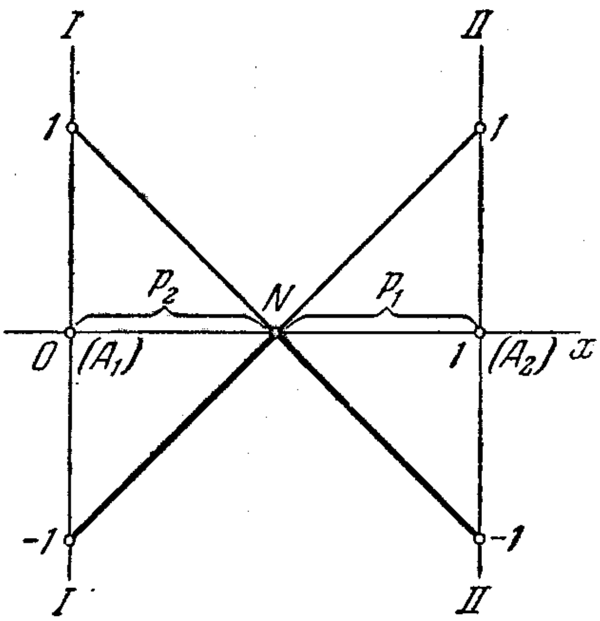

Рис. 4.6.

Пусть мы располагаем двумя стратегиями: A_1, A_2, а противник — n стратегиями: $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Матрица $\|a_{ij}\|$ задана; она состоит из двух строк и n столбцов. Аналогично случаю двух стратегий дадим задаче геометрическую интерпретацию; n стратегий противника изобразятся n прямыми (рис. 4.8). Строим нижнюю границу выигрыша (ломаную B_1MNB_2) и находим на ней точку N с максимальной ординатой. Эта точка дает решение игры (стратегию

$S^*_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$; ордината точки N равна цене игры ν, а абсцисса равна частоте p_2 стратегии A_2.

В данном случае оптимальная стратегия противника получается применением смеси двух «полезных» стратегий: B_2 и B_4, пересекающихся в точке N. Стратегия B_3 является заведомо невыгодной, а стратегия B_1—невыгодной при оптимальной стратегии S^*_A. Если A будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то выигрыш не изменится, какой бы из своих «полезных» стратегий ни пользовался B, однако, он изменится, если B перейдет к стратегиям B_1 или B_3.

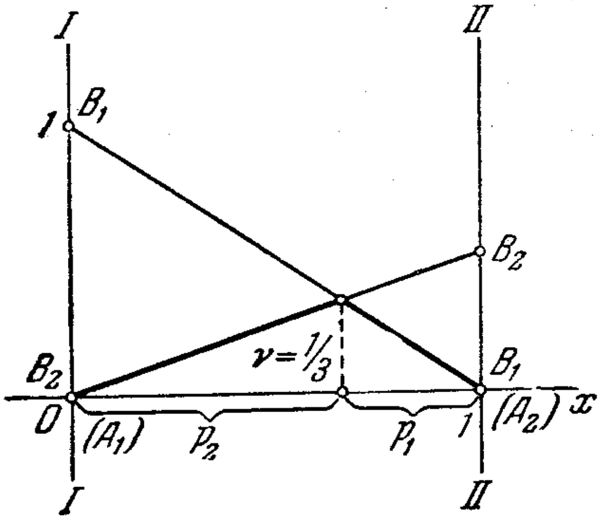

Рис. 4.7.

В теории игр доказывается, что у любой конечной игры $m \times n$ имеется решение, в котором число «полезных» стратегий той и другой стороны не превосходит наименьшего

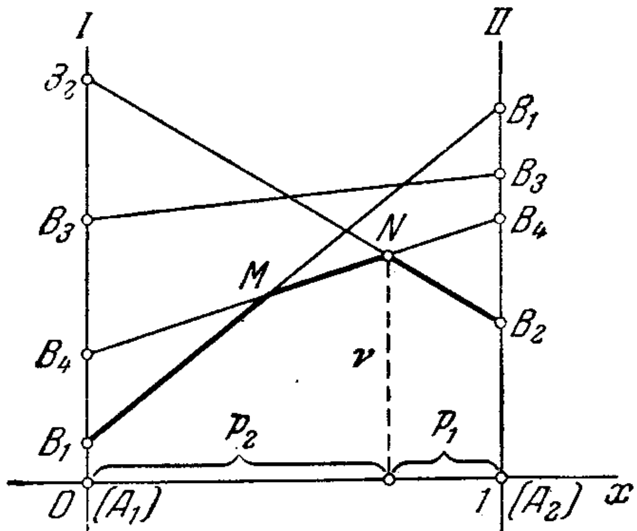

Рис. 4.8.

из двух чисел m и n. В частности, из этого следует, что у игры $2 \times m$ всегда имеется решение, в котором с той и другой стороны участвует не более двух «полезных» стратегий.

Пользуясь геометрической интерпретацией, можно дать простой способ решения любой игры $2 \times m$. Непосредственно по чертежу находим пару «полезных» стратегий противника B_j и B_k, пересекающиеся в точке N (если в точке N пересекается более двух стратегий, берем любые две из них). Мы знаем, что если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш не зависит от того, в какой пропорции применяет B свои «полезные» стратегии, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} &= \nu, \\ p_1 a_{1k} + p_2 a_{2k} &= \nu. \end{aligned}\right\}$$

Из этих уравнений и условия $p_2 = 1 - p_1$, находим p_1, p_2 и цену игры ν.

Зная цену игры, можно сразу определить оптимальную стратегию $S_B^* = \begin{pmatrix} B_j & B_k \\ q_j & q_k \end{pmatrix}$ игрока B.

Для этого решается, например, уравнение:

$$q_j a_{1j} + q_k a_{1k} = \nu,$$

где

$$q_j + q_k = 1.$$

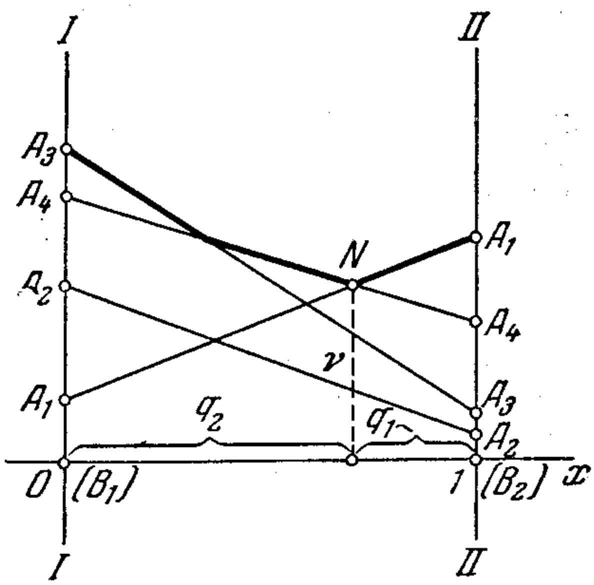

Рис. 4.9.

В случае, когда мы располагаем m стратегиями, а противник — всего двумя, очевидно, задача решается совершенно аналогичным способом; достаточно заметить, что, изменяя знак выигрыша на обратный, можно превратить игрока A из «выигрывающего» в «проигрывающего». Можно решить игру и без перемены знака выигрыша; тогда задача решается непосредственно для B, но строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша (рис. 4.9). На границе ищется точка N с минимальной ординатой, которая и есть цена игры ν.

Рассмотрим и решим несколько примеров игр 2×2 и $2 \times m$, являющихся упрощенными образчиками игр, имеющих практическое значение.

Пример 3. Сторона A посылает в район расположения противника B два бомбардировщика I и II; I летит спереди, *II* — сзади. Один из бомбардировщиков — заранее неизвестно какой — должен нести бомбу, другой выполняет функцию сопровождения. В районе противника бомбардировщики подвергаются нападению истребителя стороны *B*. Бомбардировщики вооружены пушками различной скорострельности. Если истребитель атакует задний бомбардировщик *II*, то по нему ведут огонь пушки только этого бомбардировщика; если же он атакует передний бомбардировщик, то по нему ведут огонь пушки обоих бомбардировщиков. Вероятность поражения истребителя в первом случае 0,3, во втором 0,7.

Если истребитель не сбит оборонительным огнем бомбардировщиков, то он поражает выбранную им цель с вероятностью 0,6. Задача бомбардировщиков — донести бомбу до цели; задача истребителя — воспрепятствовать этому, т. е. сбить бомбардировщик-носитель. Требуется выбрать оптимальные стратегии сторон:

а) для стороны *A*: какой бомбардировщик сделать носителем?

б) для стороны *B*: какой бомбардировщик атаковать?

Решение. Имеем простой случай игры 2×2; выигрыш — вероятность непоражения носителя.

Наши стратегии:

A_1 — носитель — бомбардировщик *I*;

A_2 — носитель — бомбардировщик *II*.

Стратегии противника:

B_1 — атакуется бомбардировщик *I*;

B_2 — атакуется бомбардировщик *II*.

Составим матрицу игры, т. е. найдем средний выигрыш при каждой комбинации стратегий.

1. A_1B_1 (носитель *I*, атакуется *I*).

Носитель не будет поражен, если бомбардировщики собьют истребитель, или не собьют, но он не поразит свою цель:

$$a_{11} = 0,7 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,82.$$

2. A_2B_1 (носитель *II*, атакуется *I*)

$$a_{21} = 1.$$

3. A_1B_2 (носитель *I*, атакуется *II*)

$$a_{12} = 1.$$

4. A_2B_2 (носитель *II*, атакуется *II*)

$$a_{22} = 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}58.$$

Матрица игры имеет вид:

A \ B	B_1	B_2
A_1	0,82	1
A_2	1	0,58

Нижняя цена игры 0,82; верхняя цена 1. Матрица не имеет седловой точки; решение ищем в области смешанных стратегий.

Имеем:

$$p_1 \cdot 0{,}82 + p_2 \cdot 1 = \nu;$$
$$p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0{,}58 = \nu;$$
$$p_2 = 1 - p_1.$$

Отсюда

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3.$$

Наша оптимальная стратегия есть

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix},$$

т. е. в качестве носителя нужно чаще выбирать *I*, чем *II*. Цена игры равна

$$\nu = 0{,}874.$$

Зная ν, определяем q_1 и q_2 — частоты стратегий B_1 и B_2 в оптимальной стратегии противника S_B^*. Имеем:

$$q_1 \cdot 0{,}82 + q_2 \cdot 1 = 0{,}874;$$
$$q_2 = 1 - q_1,$$

откуда

$$q_1 = 0{,}7; \quad q_2 = 0{,}3,$$

т. е. оптимальная стратегия противника есть

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Сторона A нападает на объект, сторона B — обороняет его. У стороны A — два самолета; у стороны B — три зенитных орудия. Каждый самолет является носителем мощного поражающего средства; для того чтобы объект был поражен, достаточно, чтобы к нему прорвался хотя бы один самолет. Самолеты стороны A могут выбирать для подхода к объекту любое из трех направлений: I, II, III (рис. 4.10).

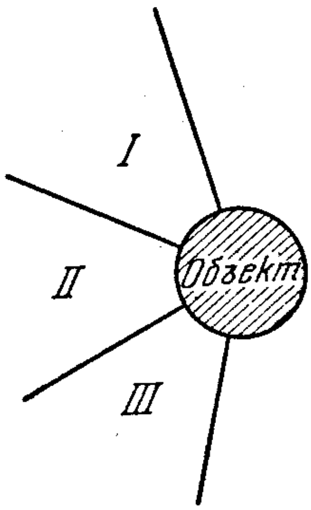

Рис. 4.10.

Противник (сторона B) может разместить любое из своих орудий на любом направлении; при этом каждое орудие простреливает только область пространства, относящуюся к данному направлению, и не простреливает соседних направлений. Каждое орудие может обстрелять только один самолет; обстрелянный самолет поражается с вероятностью 1. Сторона A не знает, где размещены орудия; сторона B не знает, откуда прилетят самолеты. Задача стороны A — поразить объект; задача стороны B — не допустить его поражения. Найти решение игры.

Решение. Игра представляет собой игру 2×3. Выигрыш — вероятность поражения объекта. Наши возможные стратегии:

A_1 — послать по одному самолету на два различных направления.

A_2 — послать оба самолета по одному направлению.

Стратегии противника:

B_1 — поставить по одному орудию на каждое направление;

B_2 — поставить два орудия на одно направление и одно — на другое;

B_3 — поставить все три орудия на одно направление.

Составляем матрицу игры.

1. A_1B_1 (самолеты летят по разным направлениям; орудия расставлены по одному).

Очевидно, при этом ни один самолет не прорвется к объекту:

$$a_{11} = 0.$$

2. A_2B_1 (самолеты летят вместе по одному направлению; орудия расставлены по одному). Очевидно, при этом один самолет пройдет к объекту необстрелянным:

$$a_{21} = 1.$$

3. A_1B_2 (самолеты летят по одному; противник защищает два направления и оставляет незащищенным третье). Вероятность того, что хотя бы один самолет прорвется к объекту, равна вероятности того, что один из них выберет незащищенное направление:

$$a_{12}=\frac{2}{3}.$$

4. A_2B_2 (самолеты летят вместе по одному направлению; противник защищает одно направление двумя орудиями и одно — одним, т. е. фактически защищает одно направление и оставляет незащищенным два). Вероятность того, что хотя бы один самолет прорвется к объекту, равна вероятности выбора парой самолетов фактически незащищенного направления:

$$a_{22}=\frac{2}{3}.$$

5. A_1B_3 (самолеты летят по одному; противник защищает тремя орудиями только одно направление)

$$a_{13}=1.$$

6. A_2B_3 (самолеты летят оба вместе; противник защищает тремя орудиями только одно направление). Чтобы объект был поражен, самолеты должны выбрать незащищенное направление:

$$a_{23}=\frac{2}{3}.$$

Матрица игры:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0	$\frac{2}{3}$	1
A_2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Из матрицы видно, что стратегия B_3 является заведомо невыгодной по сравнению с B_2 (это можно было решить и заранее). Вычеркиванием стратегии B_3 игра сводится к игре 2×2:

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	0	$\frac{2}{3}$
A_2	1	$\frac{2}{3}$

Матрица имеет седловую точку: нижняя цена игры $\frac{2}{3}$ совпадает с верхней.

Одновременно замечаем, что для нас (A) стратегия A_1 является заведомо невыгодной. Вывод: обе стороны A и B должны пользоваться всегда своими чистыми стратегиями A_2 и B_2, т. е. мы должны посылать самолеты по 2, выбирая случайным образом направление, по которому посылается пара; противник должен ставить орудия так: два — на одно направление, одно — на другое, причем выбор этих направлений также должен производиться случайно (здесь, как мы видим, уже «чистые стратегии» включают элемент случайности). Применяя эти оптимальные стратегии, мы всегда будем получать постоянный средний выигрыш $\frac{2}{3}$ (т. е. объект будет поражаться с вероятностью $\frac{2}{3}$).

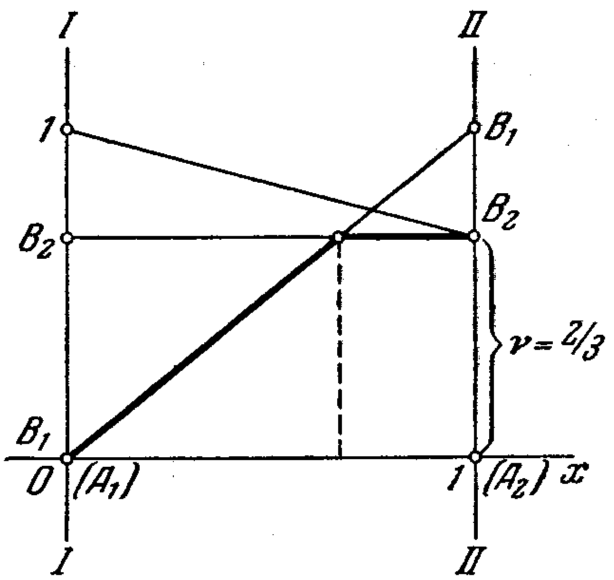

Рис. 4.11.

Заметим, что найденное решение игры не является единственным; помимо решения в чистых стратегиях, существует целый участок смешанных стратегий игрока A, являющихся оптимальными, от $p_1 = 0$ до $p_1 = \frac{1}{3}$ (рис. 4.11). Легко, например, убедиться непосредственно, что тот же средний выигрыш $\frac{2}{3}$ получится, если мы будем применять свои стратегии A_1 и A_2 в пропорции $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

Пример 5. Те же условия, что в предыдущем примере, но для нас возможны четыре направления удара, а противник располагает четырьмя орудиями.

Решение. У нас по-прежнему две возможные стратегии:

A_1 — посылать самолеты по одному,

A_2 — посылать два самолета вместе.

У противника пять возможных стратегий:

$B_1(1+1+1+1)$ — ставить по одному орудию на каждое направление;

$B_2(2+2)$ — ставить по два орудия на два различных направления;

$B_3(2+1+1)$ — ставить два орудия на одно направление и по одному — на два других;

$B_4(3+1)$ — ставить три орудия на одно направление и одно — на другое;

$B_5(4)$ — ставить все четыре орудия на одно направление.

Стратегии B_4, B_5 отбросим заранее как заведомо невыгодные. Рассуждая аналогично предыдущему примеру, строим матрицу игры:

$A \backslash B$	B_1 (1+1+1+1)	B_2 (2+2)	B_3 (2+1+1)
A_1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
A_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Нижняя цена игры $\frac{1}{2}$, верхняя $\frac{3}{4}$.

Матрица не имеет седловой точки; решение лежит в области смешанных стратегий. Пользуясь геометрической интерпретацией (рис. 4.12), выделим «полезные» стратегии противника: B_1 и B_2.

Частоты p_1 и p_2 определим из уравнений:

$$p_1 \cdot 0 + (1 - p_1) \cdot 1 = \nu;$$

$$p_1 \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_1) \cdot \frac{1}{2} = \nu,$$

откуда

$$p_1=\frac{3}{8};$$

$$p_2=\frac{5}{8};$$

$$\nu=\frac{5}{8},$$

т. е. наша оптимальная стратегия есть

$$S_A^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь ею, мы гарантируем себе средний выигрыш $\frac{5}{8}$.

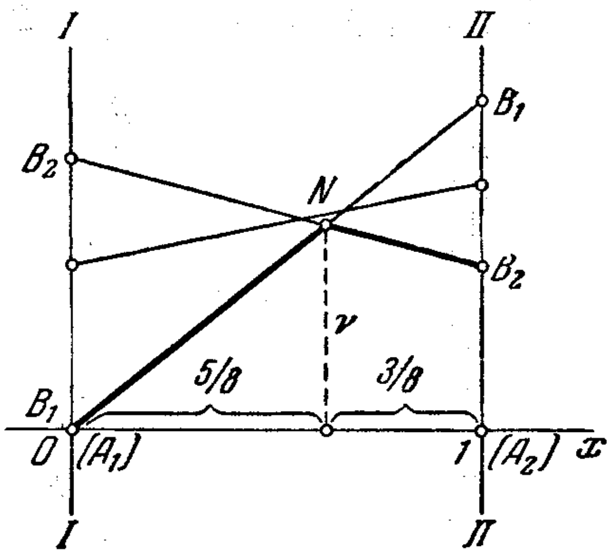

Рис. 4.12.

Зная цену игры $\nu=\frac{5}{8}$, находим частоты q_1 и q_2 «полезных» стратегий противника:

$$q_1\cdot 0+(1-q_1)\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{8},$$

$$q_1=\frac{1}{4};\quad q_2=\frac{3}{4}.$$

Оптимальная стратегия противника будет:

$$S_B^*=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Сторона A располагает двумя стратегиями A_1 и A_2, сторона B — четырьмя B_1, B_2, B_3 и B_4. Матрица игры имеет вид:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	4	10	12
A_2	8	4	3	2

Найти решение игры.

Решение. Нижняя цена игры 0,3; верхняя 0,4. Геометрическая интерпретация (рис. 4.13) показывает, что полезными стратегиями игрока B являются B_1 и B_2 или B_2 и B_4.

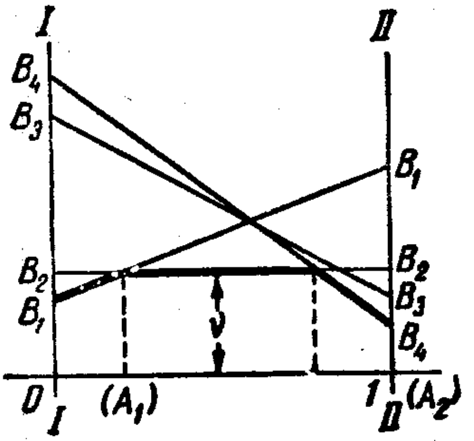

Рис. 4.13.

Игрок A имеет бесконечно много оптимальных смешанных стратегий: в оптимальной стратегии p_1 может изменяться от $\frac{1}{5}$ до $\frac{4}{5}$. Цена игры $\nu = 4$. Игрок B имеет чистую оптимальную стратегию B_2.

§ 5. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ИГР

Мы рассматривали до сих пор только самые элементарные игры типа $2 \times n$, которые могут быть весьма просто решены и допускают удобную и наглядную геометрическую интерпретацию.

В общем случае решение игры $m \times n$ представляет довольно трудную задачу, причем сложность задачи и объем необходимых для решения вычислений резко возрастает с увеличением m и n. Однако эти трудности не носят принципиального характера и связаны только с очень большим объемом расчетов, который в ряде случаев может оказаться практически невыполнимым. Принципиальная сторона

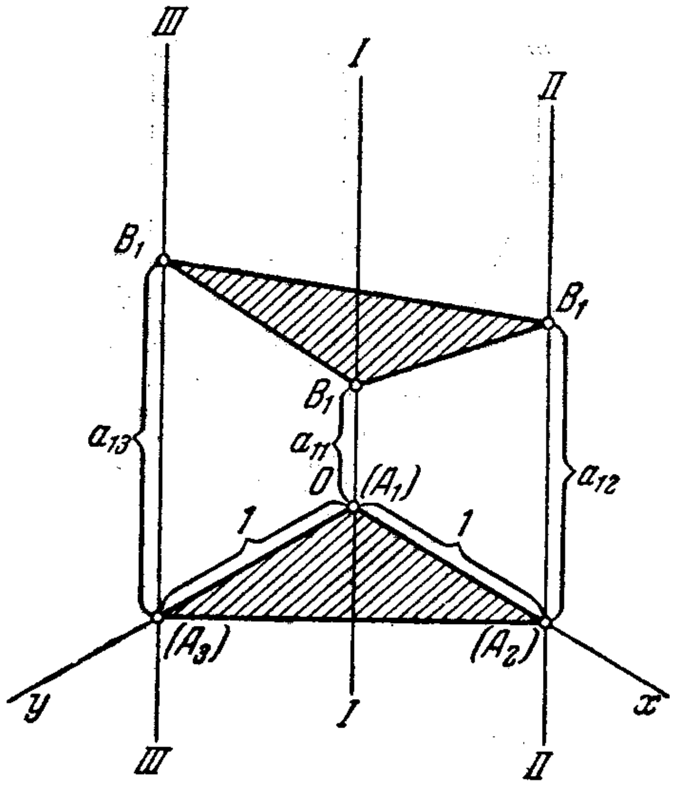

Рис. 5.1.

метода отыскания решения остается при любом m одной и той же.

Проиллюстрируем это на примере игры $3 \times n$. Дадим ей геометрическую интерпретацию — уже пространственную. Три наши стратегии A_1, A_2 и A_3 изобразим тремя точками на плоскости xOy; первая лежит в начале координат (рис. 5.1), вторая и третья — на осях Ox и Oy на расстояниях 1 от начала.

Через точки A_1, A_2 и A_3 проводятся оси $I—I$, $II—II$ и $III—III$, перпендикулярные к плоскости xOy. На оси $I—I$ откладываются выигрыши при стратегии A_1, на осях $II—II$ и $III—III$ — выигрыши при стратегиях A_2, A_3. Каждая стратегия противника B_j изобразится плоскостью, отсекающей на осях $I—I$, $II—II$ и $III—III$ отрезки, равные выигрышам при соответствующих стратегиях A_1, A_2, A_3 и стратегии B_j. Построив таким образом все стратегии противника, мы получим семейство плоскостей над треугольником A_1, A_2, A_3 (рис. 5.2). Для этого семейства также можно построить нижнюю границу выигрыша, как мы это делали в случае $2 \times n$, и найти на этой границе точку N с максимальной высотой над плоскостью xOy. Эта высота и будет ценой игры ν.

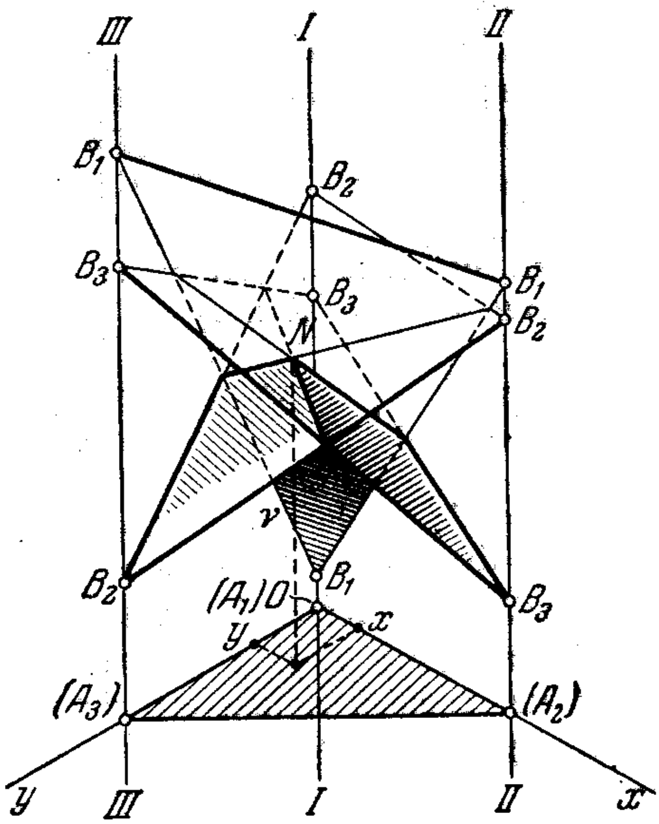

Рис. 5.2.

Частоты p_1, p_2, p_3 стратегий A_1, A_2, A_3 в оптимальной стратегии S_A^* будут определяться координатами (x, y) точки N, а именно:

$$p_2 = x; \quad p_3 = y; \quad p_1 = 1 - p_2 - p_3.$$

Однако такое геометрическое построение даже для случая $3 \times n$ нелегко осуществимо и требует большой затраты времени и усилий воображения. В общем же случае игры оно переносится в m-мерное пространство и теряет всякую наглядность, хотя употребление геометрической терминологии в ряде случаев может оказаться полезным. При решении игр $m \times n$ на практике удобнее пользоваться не геометрическими аналогиями, а расчетными аналитическими методами, тем более, что для решения задачи на вычислительных машинах эти методы единственно пригодны.

Все эти методы по существу сводятся к решению задачи путем последовательных проб, но упорядочение последовательности проб позволяет построить алгоритм, приводящий к решению наиболее экономичным способом.

Здесь мы вкратце остановимся на одном расчетном методе решения игр $m \times n$ — на так называемом методе «линейного программирования».

Для этого дадим сначала общую постановку задачи о нахождении решения игры $m \times n$. Пусть дана игра $m \times n$ с m стратегиями $A_1, A_2, \ldots, A_m$ игрока A и n стратегиями $B_1, B_2, \ldots, B_n$ игрока B и задана платежная матрица $\|a_{ij}\|$.

Требуется найти решение игры, т. е. две оптимальные смешанные стратегии игроков A и B

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \ldots A_m \\ p_1 & p_2 \ldots p_m \end{pmatrix}; \qquad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \ldots B_n \\ q_1 & q_2 \ldots q_n \end{pmatrix},$$

где $p_1 + \ldots + p_m = 1$; $q_1 + \ldots + q_n = 1$ (некоторые из чисел p_i и q_j могут быть равными нулю).

Наша оптимальная стратегия S_A^* должна обеспечивать нам выигрыш, не меньший ν, при любом поведении противника, и выигрыш, равный ν, при его оптимальном поведении (стратегия S_B^*). Аналогично стратегия S_B^* должна обеспечивать противнику проигрыш, не больший ν, при любом нашем поведении и равный ν при нашем оптимальном поведении (стратегия S_A^*).

Величина цены игры ν в данном случае нам неизвестна; будем считать, что она равна некоторому положительному числу. Полагая так, мы не нарушаем общности рассуждений; для того чтобы было $\nu > 0$, очевидно, достаточно, чтобы все элементы матрицы $\|a_{ij}\|$ были неотрицательными. Этого всегда можно добиться, прибавляя к элементам $\|\alpha_{ij}\|$ достаточно большую положительную величину L; при этом цена игры увеличится на L, а решение не изменится.

Пусть мы выбрали свою оптимальную стратегию S_A^*. Тогда наш средний выигрыш при стратегии B_j противника будет равен:

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \ldots + p_m a_{mj}.$$

Наша оптимальная стратегия S_A^* обладает тем свойством, что при любом поведении противника обеспечивает выигрыш не меньший, чем ν; следовательно, любое из чисел a_j не может быть меньше ν. Получаем ряд условий:

$$\left.\begin{aligned} p_1a_{11}+p_2a_{21}+\ldots+p_ma_{m1} &\geqslant \nu,\\ p_1a_{12}+p_2a_{22}+\ldots+p_ma_{m2} &\geqslant \nu,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_1a_{1n}+p_2a_{2n}+\ldots+p_ma_{mn} &\geqslant \nu. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Разделим неравенства (5.1) на положительную величину ν и обозначим

$$\frac{p_1}{\nu}=\xi_1;\quad \frac{p_2}{\nu}=\xi_2;\ \ldots;\ \frac{p_m}{\nu}=\xi_m.$$

Тогда условия (5.1) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1+a_{21}\xi_2+\ldots+a_{m1}\xi_m &\geqslant 1,\\ a_{12}\xi_1+a_{22}\xi_2+\ldots+a_{m2}\xi_m &\geqslant 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{1n}\xi_1+a_{2n}\xi_2+\ldots+a_{mn}\xi_m &\geqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — неотрицательные числа. Так как $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$, то величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ удовлетворяют условию

$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m=\frac{1}{\nu}. \tag{5.3}$$

Мы хотим сделать свой гарантированный выигрыш максимально возможным; очевидно, при этом правая часть равенства (5.3) принимает минимальное значение.

Таким образом, задача нахождения решения игры сводится к следующей математической задаче: *определить неотрицательные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, удовлетворяющие условиям (5.2), так, чтобы их сумма*

$$\Phi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m$$

была минимальной.

Обычно при решении задач, связанных с нахождением экстремальных значений (максимумов и минимумов), функцию дифференцируют и приравнивают производные нулю. Но такой прием в данном случае бесполезен, так как функция Φ, которую нужно обратить в минимум, линейна, и ее производные по всем аргументам равны единице, т. е. нигде не обращаются в нуль. Следовательно, максимум функции достигается где-то на границе области изменения аргументов, которая определяется требованием неотрицательности аргументов и условиями (5.2). Прием нахождения экстремальных значений при помощи дифференцирования непригоден и в тех случаях, когда для решения игры определяется максимум нижней (или минимум верхней) границы выигрыша, как мы, например, делали при решении игр $2 \times n$. Действительно, нижняя граница составлена из участков прямых линий, и максимум достигается не в точке, где производная равна нулю (такой точки вообще нет), а на границе интервала или в точке пересечения прямолинейных участков.

Для решения подобных задач, довольно часто встречающихся на практике, в математике разработан специальный аппарат *линейного программирования*.

Задача линейного программирования ставится следующим образом.

Дана система линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m = b_1, \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m = b_n. \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

Требуется найти неотрицательные значения величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, удовлетворяющие условиям (5.4) и вместе с тем обращающие в минимум заданную однородную линейную функцию величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ (линейную форму):

$$\Phi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_m\xi_m.$$

Легко убедиться, что поставленная выше задача теории игр является частным случаем задачи линейного программирования при $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 1$.

С первого взгляда может показаться, что условия (5.2) не эквивалентны условиям (5.4), так как вместо знаков равенства они содержат знаки неравенства. Однако от знаков неравенства легко избавиться, вводя новые фиктивные неотрицательные переменные $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и записывая условия (5.2) в виде:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m - z_1 = 1; \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m - z_2 = 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m - z_n = 1. \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

форма Ф, которую нужно обратить в минимум, равна

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m.$$

Аппарат линейного программирования позволяет путем сравнительно небольшого числа последовательных проб подобрать величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, удовлетворяющие поставленным требованиям. Для большей ясности мы здесь продемонстрируем применение этого аппарата прямо на материале решения конкретных игр.

Пример 1. Требуется найти решение игры 3×3, данной в примере 2 § 1, с матрицей:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Чтобы сделать все a_{ij} неотрицательными, прибавим ко всем элементам матрицы $L = 5$. Получим матрицу:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

При этом цена игры увеличится на 5, а решение не изменится.

Определим оптимальную стратегию S_A^*. Условия (5.2) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} 7\xi_1+2\xi_2+9\xi_3 &\geqslant 1,\\ 2\xi_1+9\xi_2 \qquad &\geqslant 1,\\ 9\xi_1+ \qquad 11\xi_3 &\geqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

где $\xi_1=\frac{p_1}{\nu}$; $\xi_2=\frac{p_2}{\nu}$; $\xi_3=\frac{p_3}{\nu}$.

Чтобы избавиться от знаков неравенства, введем фиктивные переменные z_1, z_2, z_3; условия (5.6) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} 7\xi_1+2\xi_2+9\xi_3-z_1 &= 1,\\ 2\xi_1+9\xi_2 \qquad -z_2 &= 1,\\ 9\xi_1+ \qquad 11\xi_3-z_3 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Линейная форма Φ имеет вид:

$$\Phi=\xi_1+\xi_2+\xi_3$$

и должна быть сделана как можно меньше.

Если все три стратегии B являются «полезными», то все три фиктивные переменные z_1, z_2, z_3 обратятся в нуль (т. е. выигрыш, равный цене игры ν, будет достигаться при каждой стратегии B_j). Но мы пока не имеем оснований утверждать, что все три стратегии являются «полезными». Чтобы проверить это, попытаемся выразить форму Φ через фиктивные переменные z_1, z_2, z_3 и посмотрим, добьемся ли мы, полагая их равными нулю, минимума формы. Для этого разрешим уравнения (5.7) относительно переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 (т. е. выразим ξ_1, ξ_2, ξ_3 через фиктивные переменные z_1, z_2, z_3):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{20}-\frac{99}{80}z_1+\frac{11}{40}z_2+\frac{81}{80}z_3,\\ \xi_2 &= \frac{1}{10}+\frac{11}{40}z_1+\frac{1}{20}z_2-\frac{9}{40}z_3,\\ \xi_3 &= \frac{1}{20}+\frac{81}{80}z_1-\frac{9}{40}z_2-\frac{59}{80}z_3. \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Складывая ξ_1, ξ_2 и ξ_3, получим:

$$\Phi=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}z_1+\frac{1}{10}z_2+\frac{1}{20}z_3. \tag{5.9}$$

В выражении (5.9) коэффициенты при всех z положительны; значит, любое увеличение z_1, z_2, z_3 сверх нуля может привести только к увеличению формы Ф, а мы хотим, чтобы она была минимальна. Следовательно, значениями z_1, z_2, z_3, обращающими форму (5.9) в минимум, являются

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Подставляя их в формулу (5.9), находим минимальное значение формы Ф:

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{5},$$

откуда цена игры

$$\nu = 5.$$

Подставляя нулевые значения z_1, z_2, z_3 в формулы (5.8), находим:

$$\xi_1 = \frac{1}{20}; \qquad \xi_2 = \frac{1}{10}; \qquad \xi_3 = \frac{1}{20},$$

или, умножая их на ν,

$$p_1 = \frac{1}{4}; \qquad p_2 = \frac{1}{2}; \qquad p_3 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, оптимальная стратегия A найдена:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

т. е. мы должны в одной четверти всех случаев писать цифру 1, в половине случаев 2 и в остальной четверти случаев 3.

Зная цену игры $\nu = 5$, можно уже известными способами найти оптимальную стратегию противника

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Для этого воспользуемся нашими любыми двумя «полезными» стратегиями (например, A_2 и A_3) и напишем уравнения:

$$2q_1 + 9q_2 = 5;$$

$$9q_1 + 11(1 - q_2 - q_1) = 5,$$

откуда $q_1 = q_3 = \frac{1}{4}$; $q_2 = \frac{1}{2}$. Оптимальная стратегия противника будет такой же, как наша:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Теперь вернемся к первоначальной (не преобразованной) игре. Для этого нужно только от цены игры $\nu = 5$ отнять величину $L=5$, прибавленную к элементам матрицы. Получим цену исходной игры $\nu_0=0$. Следовательно, оптимальные стратегии обеих сторон обеспечивают средний выигрыш, равный нулю; игра в одинаковой мере выгодна или невыгодна для обеих сторон.

Пример 2. Спортивный клуб A располагает тремя вариантами состава команды A_1, A_2 и A_3. Клуб B — также тремя вариантами B_1, B_2 и B_3. Подавая заявку для участия в соревновании, ни один из клубов не знает, какой состав изберет противник. Вероятности выигрыша клуба A при различных вариантах составов команд, примерно известные из опыта прошлых встреч, заданы матрицей.

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	0,8	0,2	0,4
A_2	0,4	0,5	0,6
A_3	0,1	0,7	0,3

Найти, с какой частотой клубы должны выставлять каждый из составов во встречах друг с другом, чтобы добиться наибольшего в среднем числа побед.

Решение. Нижняя цена игры 0,4; верхняя 0,6; решение ищем в области смешанных стратегий. Чтобы не иметь дела с дробями, умножим все элементы матрицы на 10; при этом цена игры увеличится в 10 раз, а решение не изменится. Получим матрицу:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Условия (5.5) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} 8\xi_1+4\xi_2+\xi_3-z_1&=1,\\ 2\xi_1+5\xi_2+7\xi_3-z_2&=1,\\ 4\xi_1+6\xi_2+3\xi_3-z_3&=1,\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

а условие минимума

$$\Phi=\xi_1+\xi_2+\xi_3=\min.$$

Проверяем, все ли три стратегии противника являются «полезными». В качестве гипотезы сначала предполагаем, что фиктивные переменные z_1, z_2, z_3 равны нулю, и для проверки решаем уравнения (5.10) относительно ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1&=\frac{10}{136}+\frac{27}{136}z_1+\frac{6}{136}z_2-\frac{23}{136}z_3,\\ \xi_2&=\frac{12}{136}-\frac{22}{136}z_1-\frac{20}{136}z_2+\frac{54}{136}z_3,\\ \xi_3&=\frac{8}{136}+\frac{8}{136}z_1+\frac{32}{136}z_2-\frac{32}{136}z_3,\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

откуда

$$136\Phi=30+13z_1+18z_2-51z_3. \tag{5.12}$$

Формула (5.12) показывает, что увеличение переменных z_1 и z_2 по сравнению с их предполагаемым значением нуль может только увеличить Φ, тогда как увеличение величины z_3 может уменьшить Φ. Однако увеличение z_3 надо производить осторожно, чтобы величины ξ_1, ξ_2, ξ_3, зависящие от z_3, не стали при этом отрицательными. Поэтому положим в правых частях равенств (5.11) величины z_1 и z_2 равными нулю, а величину z_3 будем увеличивать до допустимых пределов (пока какая-нибудь из величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 не обратится в нуль). Из второго равенства (5.11) видно, что увеличение z_3 «безопасно» для величины ξ_2 — она от этого только увеличивается. Что касается величин ξ_1 и ξ_3, то здесь увеличение z_3 возможно только до некоторого предела. Величина ξ_1 обращается в нуль при $z_3=\frac{10}{23}$; величина ξ_3 обращается в нуль раньше, уже при $z_3=\frac{1}{4}$. Следовательно, давая z_3 его максимально допустимое значение $z_3=\frac{1}{4}$, мы при этом обратим в нуль величину ξ_3.

Чтобы проверить, обращается ли в минимум форма Φ при $z_1=0$, $z_2=0$, $\xi_3=0$, выразим остальные (не равные нулю) переменные через предположительно равные нулю z_1, z_2, ξ_3.

Разрешая уравнения (5.10) относительно ξ_1, ξ_2 и z_3, получим:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} z_1 - \frac{4}{32} z_2 + \frac{23}{32} \xi_3, \\ \xi_2 &= \frac{6}{32} - \frac{2}{32} z_1 + \frac{8}{32} z_2 - \frac{54}{32} \xi_3, \\ z_3 &= \frac{8}{32} + \frac{8}{32} z_1 + z_2 - \frac{136}{32} \xi_3, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$32\Phi = 7 + 3z_1 + 4z_2 + \xi_3. \tag{5.13}$$

Из формулы (5.13) видно, что любое увеличение величин z_1, z_2, ξ_3 сверх их предполагаемых нулевых значений может только увеличить форму Φ. Следовательно, решение игры найдено; оно определяется значениями

$$z_1 = z_2 = \xi_3 = 0,$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{1}{32}; \quad \xi_2 = \frac{3}{16}; \quad z_3 = \frac{1}{4}.$$

Подставляя в формулу (5.13), находим цену игры ν:

$$32\Phi = 7 = \frac{32}{\nu}; \quad \nu = \frac{32}{7}.$$

Наша оптимальная стратегия:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

«Полезные» стратегии (составы A_1 и A_2) должны применяться с частотами $\frac{1}{7}$ и $\frac{6}{7}$; состав A_3 — никогда не применяться.

Чтобы найти оптимальную стратегию противника, в общем случае можно поступать так: изменить знак выигрыша на обратный, прибавить к элементам матрицы постоянную величину L, чтобы сделать их неотрицательными, и решать задачу за противника так же, как мы решали ее за себя. Однако то, что нам уже известна цена игры ν, несколько упрощает задачу. К тому же в данном конкретном случае задача дополнительно упрощается тем, что в решении участвуют только две «полезные» стратегии противника B_1 и B_2, так как величина z_3 не равна нулю, и, значит, при стратегии B_3 цена игры не достигается. Выбирая любую «полезную» стратегию игрока A, например A_1, можно найти частоты q_1 и q_2. Для этого пишем уравнение

$$8q_1 + 2(1 - q_1) = \frac{32}{7},$$

откуда

$$q_1 = \frac{3}{7}; \quad q_2 = \frac{4}{7};$$

оптимальная стратегия противника будет:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix},$$

т. е. противник не должен пользоваться составом B_3, а составы B_1 и B_2 должны применяться с частотами $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$.

Возвращаясь к первоначальной матрице, определим истинную цену игры

$$\nu_0 = \frac{32}{7} : 10 = 0{,}457.$$

Это значит, что при большом числе встреч число побед клуба A составит 0,457 всех встреч.

§ 6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИГР

Часто в практических задачах нет необходимости находить точное решение игры; достаточно найти приближенное решение, дающее средний выигрыш, близкий к цене игры. Ориентировочное знание цены игры ν может дать уже простой анализ матрицы и определение нижней (α) и верхней (β) цен игры. Если α и β близки, практически нет надобности заниматься поисками точного решения, а достаточно будет выбрать чистые минимаксные стратегии. В случаях, когда α и β не близки, можно получить приемлемое для практики решение с помощью численных методов решения игр, из которых мы вкратце осветим метод *итераций*.

Идея метода итераций сводится к следующему. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором противники A и B применяют друг против друга свои стратегии. Эксперимент состоит из последовательности элементарных игр, каждая из которых имеет матрицу заданной игры. Начинается с того, что мы (игрок A) выбираем произвольно одну из своих стратегий, например A_i. Противник на это отвечает той своей стратегией B_j, которая наименее выгодна для нас, т. е. обращает выигрыш при стратегии A_i в минимум. На этот ход мы отвечаем той своей стратегией A_k, которая дает максимальный средний выигрыш при применении противником стратегии B_j. Далее — снова очередь противника. Он отвечает на нашу пару ходов A_i и A_k той своей стратегией B_l, которая дает нам наименьший средний выигрыш при этих двух стратегиях (A_i, A_k), и так далее. На каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на любой ход другого игрока той своей стратегией, которая является оптимальной относительно всех его предыдущих ходов, рассматриваемых как некоторая смешанная стратегия, в которой чистые стратегии представлены в пропорциях, соответствующих частоте их применения.

Такой способ представляет собой как бы модель реального практического «обучения» игроков, когда каждый из них на опыте прощупывает способ поведения противника и старается отвечать на него наивыгоднейшим для себя образом.

Если такую имитацию процесса обучения продолжать достаточно долго, то средний выигрыш, приходящийся на одну пару ходов (элементарную игру), будет стремиться к цене игры, а частоты $p_1, \ldots, p_m; q_1, \ldots, q_n$, с которыми встречаются стратегии игроков в этом розыгрыше, будут приближаться к частотам, определяющим оптимальные стратегии. Расчеты показывают, что сходимость метода очень медленная, однако для быстродействующих счетных машин это не является препятствием.

Проиллюстрируем применение итерационного метода на примере игры 3×3, решенной в примере 2 предыдущего параграфа.

Игра задана матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Таблица 6.1

n	i	B_1	B_2	B_3	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{\nu}$	$\overline{\nu}$	ν^*
1	3	$\underline{1}$	7	3	1	$\overline{8}$	4	1	1	8	4,50
2	1	9	9	$\underline{7}$	3	$\overline{12}$	10	4	3,50	6,00	4,75
3	1	17	$\underline{11}$	11	2	14	$\overline{15}$	11	3,67	5,00	4,33
4	2	21	$\underline{16}$	17	2	16	$\overline{20}$	18	4,00	5,00	4,50
5	2	25	$\underline{21}$	23	2	18	$\overline{25}$	25	4,20	5,00	4,60
6	2	29	$\underline{26}$	29	2	20	30	$\overline{32}$	4,33	5,33	4,82
7	3	$\underline{30}$	33	32	1	28	$\overline{34}$	33	4,29	4,86	4,57
8	2	$\underline{34}$	38	38	1	36	$\overline{38}$	34	4,25	4,75	4,50
9	2	$\underline{38}$	43	44	1	$\overline{44}$	42	35	4,23	4,89	4,56
10	1	46	$\underline{45}$	48	2	46	$\overline{47}$	42	4,50	4,70	4,60
11	2	$\underline{50}$	50	54	1	$\overline{54}$	51	43	4,55	4,91	4,72
12	1	58	$\underline{52}$	58	2	56	$\overline{56}$	50	4,33	4,66	4,49
13	2	62	$\underline{57}$	64	2	58	$\overline{61}$	57	4,38	4,70	4,54
14	2	66	$\underline{62}$	70	2	60	$\overline{66}$	64	4,43	4,71	4,56
15	2	70	$\underline{67}$	76	2	62	71	$\overline{71}$	4,47	4,73	4,60
16	3	$\underline{71}$	74	79	1	70	$\overline{75}$	72	4,44	4,69	4,56
17	2	$\underline{75}$	79	85	1	78	79	73	4,41	4,65	4,53
18	2	$\underline{79}$	84	91	1	$\overline{86}$	83	74	4,39	4,78	4,58
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

В таблице 6.1 приведены первые 18 шагов итерационного процесса. В первом столбце дан номер элементарной игры (пары ходов) n; во втором — номер i выбранной стратегии игрока A; в последующих трех — «накопленный выигрыш» за первые n игр при стратегиях противника B_1, B_2, B_3. Минимальное из этих значений подчеркнуто. Далее идет номер j стратегии, выбранной противником, и соответственно накопленный выигрыш за n игр при стратегиях A_1, A_2, A_3; из этих значений подчеркнуто сверху максимальное. Подчеркнутые значения определяют выбор ответной стратегии другого игрока. В следующих графах последовательно приведены: минимальный средний выигрыш $\underline{\nu}$, равный минимальному накопленному выигрышу, деленному на число игр n; максимальный средний выигрыш $\overline{\nu}$, равный максимальному накопленному выигрышу, деленному на n, и их среднее арифметическое $\nu^* = \frac{\underline{\nu} + \overline{\nu}}{2}$. При увеличении n все три величины $\underline{\nu}$, $\overline{\nu}$ и ν^* будут приближаться к цене игры ν, но величина ν^*, естественно, будет приближаться к ней сравнительно быстрее.

Как видно из примера, сходимость итераций весьма медленная, но все же даже такой небольшой расчет дает возможность найти ориентировочное значение цены игры и выявить преобладание «полезных» стратегий. При пользовании счетными машинами ценность метода значительно увеличивается.

Преимущество итерационного метода решения игр в том, что объем и сложность вычислений сравнительно слабо возрастают по мере увеличения числа стратегий m и n.

§ 7. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ИГР

Бесконечной игрой называется игра, в которой по крайней мере одна из сторон имеет бесконечное множество стратегий. Общие методы решения таких игр еще мало разработаны. Однако для практики могут представлять интерес некоторые частные случаи, которые допускают сравнительно простое решение.

Рассмотрим игру двух противников A и B, каждый из которых имеет бесконечное (несчетное) множество стратегий; эти стратегии для игрока A соответствуют различным значениям непрерывно меняющегося параметра x, а для B — параметра y. В данном случае вместо матрицы $\|a_{ij}\|$ игру определяет некоторая функция двух непрерывно меняющихся аргументов $a(x, y)$, которую мы будем называть *функцией выигрыша* (заметим, что сама функция $a(x, y)$ необязательно должна быть непрерывной). Функцию выигрыша $a(x, y)$ можно представить геометрически некоторой поверхностью $a(x, y)$ над областью изменения аргументов (x, y) (рис. 7.1)

Анализ функции выигрыша $a(x, y)$ производится аналогично анализу платежной матрицы. Сначала находится нижняя цена игры α; для этого определяется для каждого x минимум функции $a(x, y)$ по всем y:

$$\min_y a(x, y);$$

затем ищется максимальное из этих значений по всем x (максимин):

$$\alpha = \max_x \min_y a(x, y).$$

Верхняя цена игры (минимакс) определяется аналогично:

$$\beta = \min_y \max_x a(x, y).$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. Так как цена игры ν всегда заключена между α и β, то общее их значение и есть ν.

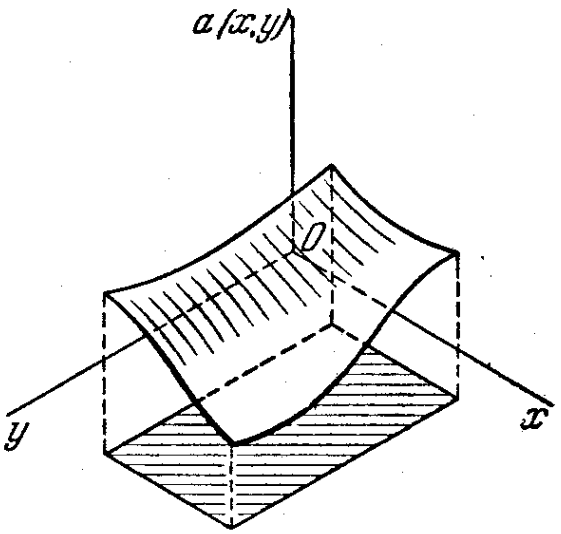

Рис. 7.1.

Равенство $\alpha = \beta$ означает, что поверхность $a(x, y)$ имеет *седловую точку*, т. е. такую точку с координатами x_0, y_0, в которой $a(x, y)$ является одновременно минимальным по y и максимальным по x (рис. 7.2).

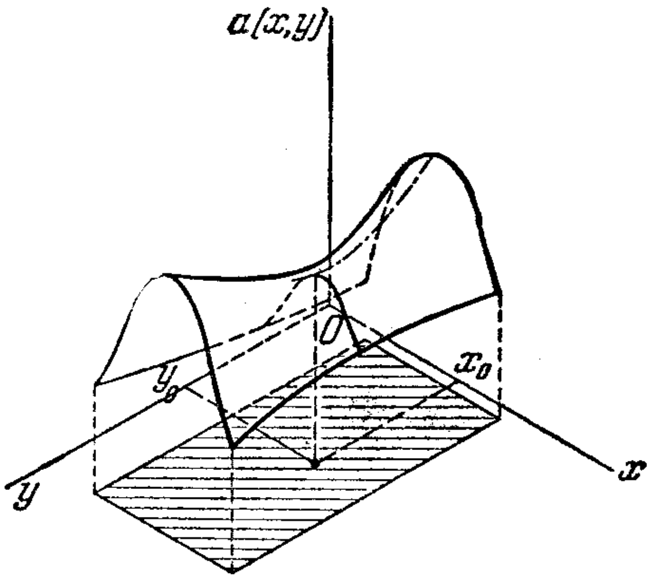

Рис. 7.2.

Значение $a(x, y)$ в этой точке и есть цена игры ν:

$$\nu = a(x_0, y_0).$$

Наличие седловой точки означает, что данная бесконечная игра имеет решение в области чистых стратегий; x_0, y_0

представляют собой оптимальные чистые стратегии A и B. В общем случае, когда $\alpha \neq \beta$, игра может иметь решение только в области смешанных стратегий (возможно, не единственное). Смешанная стратегия для бесконечных игр есть некоторое распределение вероятностей для стратегий x и y, рассматриваемых как случайные величины. Это распределение может быть непрерывным и определяться плотностями $f_1(x)$ и $f_2(y)$; может быть дискретным, и тогда оптимальные стратегии состоят из набора отдельных чистых стратегий, выбираемых с какими-то отличными от нуля вероятностями.

В случае, когда бесконечная игра не имеет седловой точки, можно дать наглядную геометрическую интерпретацию нижней и верхней цене игры. Рассмотрим бесконечную игру с функцией выигрыша $a(x, y)$ и стратегиями x, y, заполняющими непрерывно отрезки осей (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Чтобы определить нижнюю цену игры α, нужно «посмотреть» на поверхность $a(x, y)$ со стороны оси y, т. е. спроектировать ее на плоскость xOa (рис. 7.3). Получим

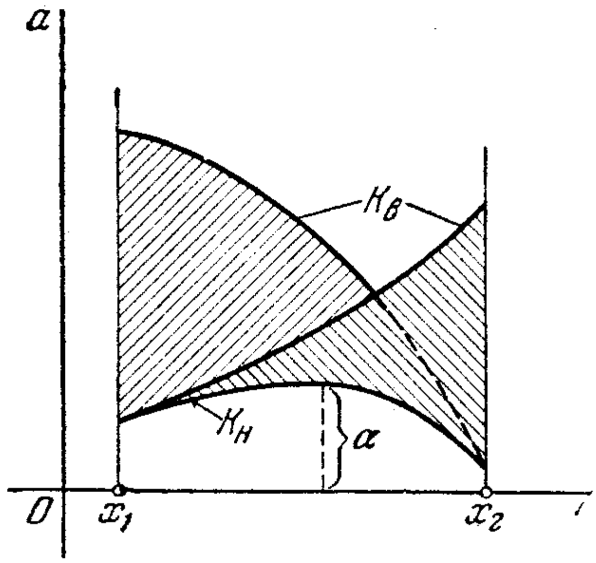

Рис. 7.3.

некоторую фигуру, ограниченную с боков прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$, а сверху и снизу — кривыми $K_в$ и $K_н$. Нижняя цена игры α, очевидно, есть не что иное, как максимальная ордината кривой $K_н$. Аналогично, чтобы найти верхнюю цену игры β, нужно «посмотреть» на поверхность $a(x, y)$ со стороны оси Ox (спроектировать поверхность на плоскость yOa) и найти минимальную ординату верхней границы $K_в$ проекции (рис. 7.4).

Рассмотрим два элементарных примера бесконечных игр.

Пример 1. Игроки A и B имеют каждый несчетное множество возможных стратегий x и y, причем $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Функция выигрыша задана выражением

$$a(x, y) = (x - y)^2.$$

Найти решение игры.

Решение. Поверхность $a(x, y)$ представляет собой параболический цилиндр (рис. 7.5) и не имеет седловой точки. Определим нижнюю цену игры; очевидно, $\min\limits_{y} a(x, y) = 0$ для всех x; отсюда

$$\alpha = \max_{x} \min_{y} a(x, y) = 0.$$

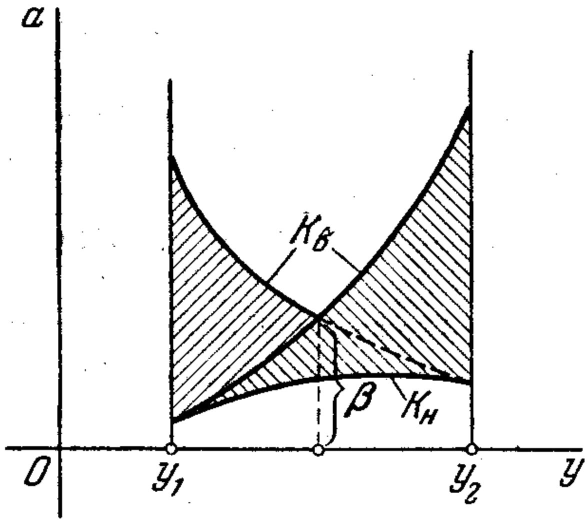

Рис. 7.4.

Определим верхнюю цену игры. Для этого найдем при фиксированном y

$$\max_{x} (x - y)^2.$$

В данном случае максимум достигается всегда на границе интервала (при $x = 0$, или $x = 1$), т. е. он равен той из

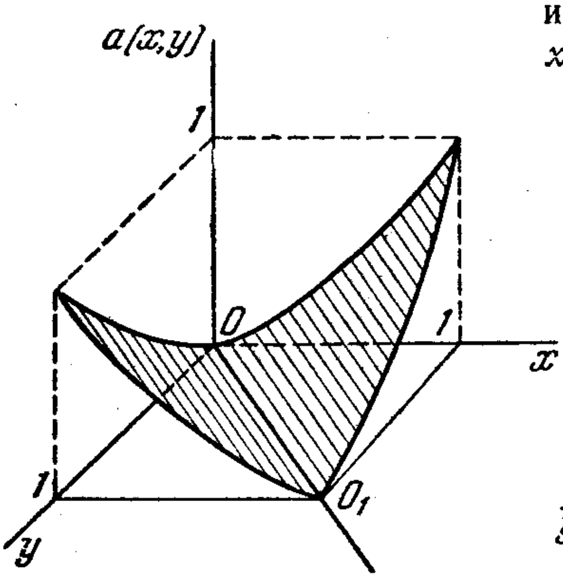

Рис. 7.5.

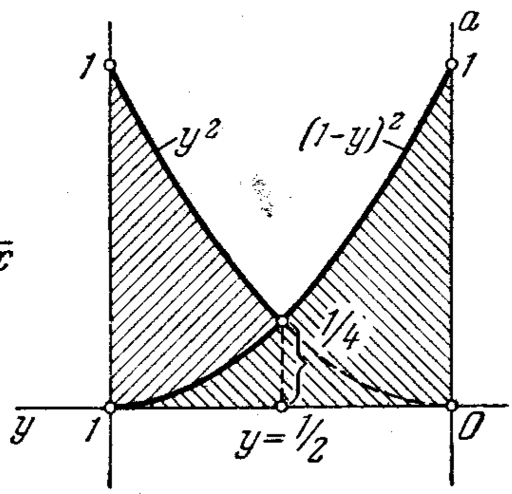

Рис. 7.6.

величин y^2; $(1 - y)^2$, которая больше. Изобразим графики этих функций (рис. 7.6), т. е. проекцию поверхности $a(x, y)$ на плоскость yOa. Жирной линией на рис. 7.6 показана функция $\max_x (x-y)^2$. Очевидно, ее минимальное значение достигается при $y=\frac{1}{2}$ и равно $\frac{1}{4}$. Следовательно, верхняя цена игры $\beta=\frac{1}{4}$.

В данном случае верхняя цена игры совпадает с ценой игры ν. Действительно, игрок A может применить смешанную стратегию $S_A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, в которую крайние значения $x=0$ и $x=1$ входят с одинаковыми частотами; тогда при любой стратегии y игрока B средний выигрыш игрока A будет равен:

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(1-y)^2.$$

Нетрудно убедиться, что эта величина при любых значениях y между 0 и 1 имеет значение не меньшее $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(1-y)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Таким образом, игрок A применением данной смешанной стратегии может гарантировать себе выигрыш, равный верхней цене игры; так как цена игры не может быть больше верхней цены, то данная стратегия S_A есть оптимальная:

$$S_A=S_A^*.$$

Остается найти оптимальную стратегию игрока B.

Очевидно, что если цена игры ν равна верхней цене игры β, то оптимальной стратегией игрока B будет всегда его чистая минимаксная стратегия, гарантирующая ему верхнюю цену игры. В данном случае такой стратегией является $y_0=\frac{1}{2}$. Действительно, при этой стратегии, что бы ни делал игрок A, выигрыш его не будет больше $\frac{1}{4}$. Это следует из очевидного неравенства

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x(x-1)+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Сторона A («мы») ведет стрельбу по самолету B противника. Для того чтобы уклониться от обстрела, противник может маневрировать с некоторой перегрузкой y, которой он по своему усмотрению может придавать значения от $y=0$ (прямолинейное движение) до $y=y_{max}$ (полет по окружности максимальной кривизны). Будем считать y_{max} единицей измерения, т. е. положим $y_{max}=1$.

В борьбе с противником мы можем применять прицельные приспособления, основанные на той или иной гипотезе о движении цели за время полета снаряда. Перегрузка x при этом гипотетическом маневре может полагаться равной любому значению от 0 до 1.

Наша задача — поразить противника; задача противника — остаться непораженным. Вероятность поражения для данных x и y приближенно выражается формулой

$$a(x, y)=pe^{-k(x-y)^2},$$

где y — перегрузка, применяемая противником; x — перегрузка, учтенная в прицеле.

Требуется определить оптимальные стратегии обеих сторон.

Р е ш е н и е. Очевидно, решение игры не изменится, если мы положим $p=1$. Функция выигрыша $a(x, y)$ изображается поверхностью, представленной на рис. 7.7.

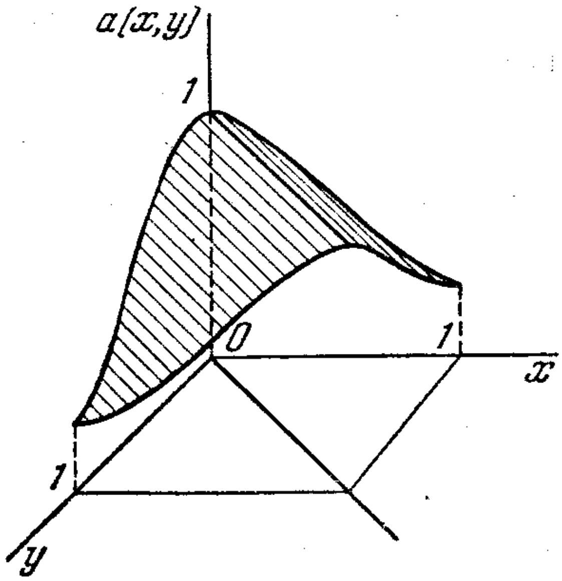

Рис. 7.7.

Это — цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны биссектрисе координатного угла xOy, а сечение плоскостью, перпендикулярной к образующей, есть кривая типа нормальной кривой распределения.

Пользуясь предложенной выше геометрической интерпретацией нижней и верхней цены игры, находим $\beta=1$ (рис. 7.8) и $\alpha=e^{-\frac{k}{4}}$ (рис. 7.9).

Игра не имеет седловой точки; решение нужно искать в области смешанных стратегий. Задача до некоторой степени аналогична задаче предыдущего примера. Действительно, при малых значениях k функция $e^{-k(x-y)^2}$ ведет себя примерно как функция $-(x-y)^2$, и решение игры получится, если в решении предыдущего примера поменять ролями игроков A и B; т. е. нашей оптимальной стратегией будет чистая стратегия $x=\frac{1}{2}$, а оптимальная стратегия противника

$$S_B^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

будет состоять в том, чтобы с одинаковыми частотами применять крайние стратегии $y=0$ и $y=1$. Это значит, что мы должны во всех случаях применять прицел, рассчитанный на перегрузку $x=\frac{1}{2}$, а противник должен в половине всех случаев вообще не применять маневра, а в половине — максимально возможный маневр.

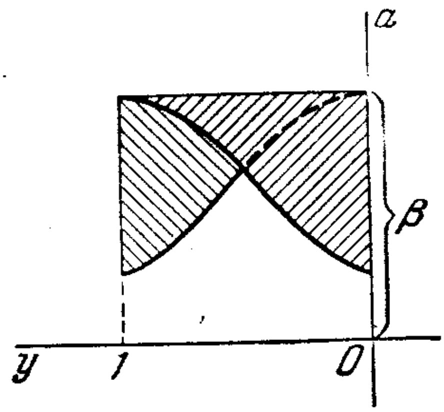

Рис. 7.8.

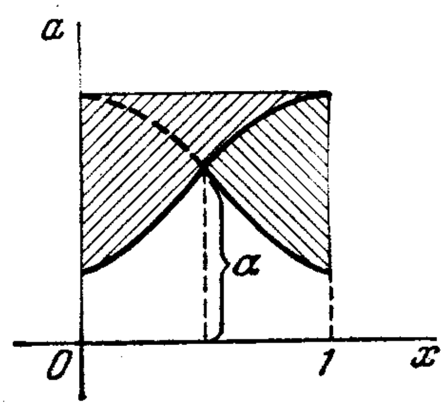

Рис. 7.9.

Легко доказать, что это решение будет справедливо для значений $k\leqslant 2$. Действительно, средний выигрыш при стратегии противника

$$S_B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

и при нашей стратегии x выражается функцией

$$a(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-kx^2}+e^{-k(1-x)^2}\right),$$

которая для значений $k\leqslant 2$ имеет один максимум при $x=\frac{1}{2}$, равный нижней цене игры α. Следовательно, применение стратегии S_B гарантирует противнику проигрыш, не больший α, из чего ясно, что α — нижняя цена игры — и есть цена игры ν.

При $k > 2$ функция $a(x)$ имеет два максимума (рис. 7.10), расположенные симметрично относительно $x = \frac{1}{2}$ в точках x_0 и $1 - x_0$, причем значение x_0 зависит от k.

Очевидно, при $k = 2$ $x_0 = 1 - x_0 = \frac{1}{2}$; при увеличении k точки x_0 и $1 - x_0$ раздвигаются, подходя ближе к крайним точкам (0 и 1). Следовательно, решение игры будет зависеть от k. Зададим конкретное значение k, например $k = 3$, и найдем решение игры; для этого определим абсциссу x_0 максимума кривой $a(x)$.

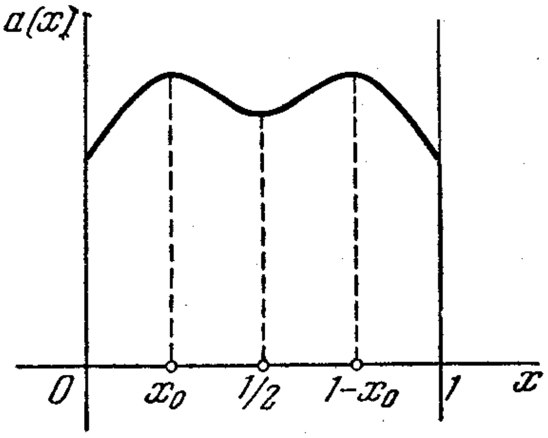

Рис. 7.10.

Приравнивая нулю производную функции $a(x)$, напишем уравнение для определения x_0:

$$xe^{-3x^2} = (1 - x)\, e^{-3(1-x)^2}.$$

Это уравнение имеет три корня: $x = \frac{1}{2}$ (где достигается минимум) и x_0, $1 - x_0$, где достигаются максимумы. Решая уравнение численно, находим приближенно

$$x_0 \approx 0{,}07;$$
$$1 - x_0 \approx 0{,}93.$$

Докажем, что решением игры в данном случае будет следующая пара стратегий:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} x_0 & 1 - x_0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

При нашей стратегии S_A^* и стратегии противника y средний выигрыш равен

$$a_1(y) = \frac{1}{2}\left(e^{-3(0{,}07-y)^2} + e^{-3(0{,}93-y)^2}\right).$$

Найдем минимум $a_1(y)$ при $0 < y < 1$. Функция $a_1(y)$ симметрична относительно $y=\frac{1}{2}$ и может иметь только один или два максимума; ее минимум, во всяком случае, достигается либо в середине отрезка (0, 1), либо на его концах. Полагая $y=0$ (или $y=1$), найдем

$$a_1(0)=a_1(1)=\frac{1}{2}(e^{-3\cdot 0{,}07^2}+e^{-3\cdot 0{,}93^2})=0{,}530.$$

Полагая $y=\frac{1}{2}$, получаем

$$a_1\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-3\cdot 0{,}43^2}=0{,}574,$$

что больше, чем $a_1(0)$; следовательно, цена игры не меньше, чем $a_1(0)$:

$$\nu \geqslant \frac{1}{2}\left(e^{-3x_0^2}+e^{-3(1-x_0)^2}\right)=0{,}530.$$

Теперь допустим, что противник применяет стратегию S_B^*, а мы — стратегию x. Тогда средний выигрыш будет

$$a_2(x)=\frac{1}{2}(e^{-3x^2}+e^{-3(1-x)^2}). \qquad (7.2)$$

Но мы выбрали x_0 именно так, чтобы при $x=x_0$ достигался максимум выражения (7.2); следовательно,

$$a_2(x) \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{-3x_0^2}+e^{-3(1-x_0)^2}\right)=0{,}530,$$

т. е. противник применением стратегии S_B^* может не допустить проигрыша, бо́льшего 0,530; следовательно, $\nu=0{,}530$ и есть цена игры, а стратегии S_A^* и S_B^* дают решение. Это значит, что мы должны с одинаковой частотой пользоваться прицелами с $x=0{,}07$ и $x=0{,}93$, а противник с одинаковой частотой не маневрировать и маневрировать с максимальной перегрузкой.

Заметим, что выигрыш $\nu=0{,}530$ заметно больше, чем нижняя цена игры

$$\alpha=e^{-\frac{k}{4}}=e^{-0{,}75}=0{,}472,$$

которую мы могли бы обеспечить себе, применяя свою максиминную стратегию $x_0=\frac{1}{2}$.

Одним из практических способов решения бесконечных игр является их приближенное сведение к конечным. При этом целый диапазон возможных стратегий каждого игрока условно объединяется в одну стратегию. Таким способом, разумеется, можно получить только приближенное решение игры, но в большинстве случаев точного решения и не требуется.

Однако нужно иметь в виду, что при применении этого приема могут появиться решения в области смешанных стратегий даже в случаях, когда решение исходной бесконечной игры возможно в чистых стратегиях, т. е. когда бесконечная игра имеет седловую точку. Если путем сведения бесконечной игры к конечной получено смешанное решение, в которое входят только две соседние «полезные» стратегии, то имеет смысл попытаться применить промежуточную между ними чистую стратегию исходной бесконечной игры.

В заключение заметим, что бесконечные игры в отличие от конечных могут и не иметь решения. Приведем пример бесконечной игры, не имеющей решения. Два игрока называют каждый любое целое число. Назвавший большее число получает от другого 1 рубль. Если оба назвали одно и то же число, игра заканчивается вничью. Игра, очевидно, не может иметь решения. Однако существуют классы бесконечных игр, для которых решение заведомо существует. В частности, можно доказать, что если в бесконечной игре возможные стратегии x, y игроков A, B непрерывно заполняют некоторые промежутки и функция выигрыша $a(x, y)$ непрерывна, то решение игры (в чистых или смешанных стратегиях) всегда существует.

Елена Сергеевна Вентцель

Элементы теории игр

Редактор *В. Ф. Колчин*

Техн. редактор *Е. А. Ермакова*
Корректор *Л. В. Лихачева*

Печать с матриц.
Подписано к печати 5/VI 1961 г.
Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 2,125.
Условн. печ. л. 3,48. Уч.-изд. л. 3.04.
Тираж 40 000 экз. Т-03170.
Цена книги 9 коп. Заказ № 2597.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 9 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ